Andrés Nortes Checa

300 problemas de álgebra lineal y geometría

tema

300 problemas de álgebra lineal y geometría

300 problemas de álgebra lineal y geometría
1.ª edición: Enero 1982
2.ª edición: Febrero 1992

Impreso en LERKO PRINT, S. A.
Paseo de la Castellana, 121. 28046 Madrid

Depósito Legal: MU-46-1982
I.S.B.N.: 84-300-6327-7

ANDRES NORTES CHECA
Catedrático de Didáctica de las Matemáticas

300 problemas de álgebra lineal y geometría

INDICE

PRESENTACION

Con el título **300 problemas de álgebra lineal y geometría** *se presenta el segundo libro de la colección «300 problemas de...» cuyo contenido se agrupa bajo siete capítulos en los siguientes epígrafes: 1) Estructuras, 2) Espacios Vectoriales, 3) Determinantes, Matrices y Sistemas, 4) Aplicaciones lineales y bilineales, 5) Polinomios, 6) Transformaciones ortogonales. Homotecias y Semejanzas y 7) Areas y Volúmenes de Cuerpos Geométricos.*

Cada capítulo va encabezado con unos Conceptos teóricos que ayudarán al alumno en la comprensión de los problemas planteados y resueltos de forma minuciosa.

Con este libro pretendemos ayudar a aquellos alumnos bien de COU, bien de Primer Curso de Ciencias o Escuelas Técnicas que han de seguir el curso de Algebra Lineal y no tienen bien consolidados los conocimientos de cursos anteriores. Este libro, les será de una gran ayuda para rellenar las lagunas de conocimientos que posean e incluso para desmenuzar aquellos ejercicios que les expliquen en clase ya que aquí no hemos dado por sabido la gran cantidad de conceptos previos, cosa que es práctica habitual en los cursos universitarios.

Por último he de agradecer la colaboración prestada por el compañero Juan Antonio Barceló Valcárcel, que leyó el contenido de este libro y me aportó sugerencias que contribuyeron a enriquecerlo.

Andrés Nortes Checa

1. Estructuras

CONCEPTOS TEORICOS

— **Semigrupo:** (C, $*$) es semigrupo si verifica las propiedades de operación interna y asociativa.

— **Semigrupo con elemento neutro:** (C, $*$) es semigrupo con elemento neutro si verifica las propiedades de operación interna, asociativa y existencia de elemento neutro.

— **Grupo:** (C, $*$) es grupo si verifica las propiedades de operación interna, asociativa, elemento neutro y elemento inverso.

— **Grupo conmutativo o abeliano:** (C, $*$) es grupo abeliano si además de las propiedades de grupo verifica la propiedad conmutativa.

— **Subgrupo:** Sea (G, $*$) grupo y S un subconjunto de G tal que (S, $*$) es grupo, entonces (S, $*$) recibe el nombre de subgrupo de G.

— **Semianillo:** (S, $*$, $\cdot$) es semianillo si: 1) (S, $*$) es semigrupo abeliano; 2) (S, $\cdot$) es semigrupo, y 3) Se verifica la propiedad distributiva de $\cdot$ respecto $*$.

— **Anillo:** (A, $*$, $\cdot$) es anillo si: 1) (A, $*$) es grupo abeliano; 2) (A, $\cdot$) es semigrupo, y 3) Se verifica la propiedad distributiva de $\cdot$ respecto $*$.

— **Subanillo:** Sea (A, $*$, $\cdot$) anillo y B un subconjunto de A tal que (B, $*$, $\cdot$) es anillo, entonces (B, $*$, $\cdot$) recibe el nombre de subanillo de A.

— **Cuerpo:** $(C, *, \cdot)$ es cuerpo si: 1) $(C, *)$ es grupo abeliano; 2) $(C, \cdot)$ es grupo, y 3) Se verifica la propiedad distributiva de $\cdot$ respecto de $*$.

— **Subcuerpo:** Sea $(C, *, \cdot)$ cuerpo y M un subconjunto de C tal que $(M, *, \cdot)$ es cuerpo, entonces $(M, *, \cdot)$ recibe el nombre de subcuerpo de C.

— **Homomorfismo:** Dados $(A, *)$ y $(B, \cdot)$, una aplicación f de A en B es un homomorfismo si se verifica:

$$\forall a, b \in A \Rightarrow f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$$

— **Isomorfismo:** Cuando f es homomorfismo y además la aplicación es biyectiva.

— **Homomorfismo e isomorfismo entre grupos, anillos y cuerpos:** La misma definición, pero en cada caso los conjuntos A y B respecto de una o dos operaciones deben de tener las estructuras de grupo, anillo o cuerpo.

— **Núcleo de un homomorfismo:** Dado un homomorfismo f de $(A, *)$ en $(B, \cdot)$, llamamos núcleo, Ker(f), al conjunto de todos los elementos de A cuya imagen, mediante f, es el elemento neutro de $(B, \cdot)$.

PROBLEMAS

1. *En el conjunto Z de los números enteros se definen las operaciones:*

$$1)\quad x * y = 3x + 2y$$

$$2)\quad x * y = xy + 1$$

$$3)\quad x * y = y$$

¿Qué propiedades tiene cada operación?

Solución

1) La operación: $x * y = 3x + 2y$ tiene las propiedades:

— *Operación interna:* $\forall x, y \in Z \Rightarrow x * y = 3x + 2y \in Z$

Sí la cumple.

— *Propiedad asociativa:* $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = 3(x * y) + 2z = 3(3x + 2y) + 2z = 9x + 6y + 2z$$

$$x * (y * z) = 3x + 2(y * z) = 3x + 2(3y + 2z) = 3x + 6y + 4z$$

No la cumple: $(x * y) * z \neq x * (y * z)$

— *Elemento neutro:* $x * e = x$

$$x * e = 3x + 2e = x \Rightarrow e = -x$$

No la cumple, porque el elemento neutro no es único.

— *Propiedad conmutativa:* $x * y = y * x$

$$x * y = 3x + 2y$$

$$y * x = 3y + 2x$$

No la cumple: $x * y \neq y * x$

La operación $x * y = 3x + 2y$ solamente es interna.

2) La operación $x * y = xy + 1$ tiene las propiedades:

— *Operación interna:* $\forall x,\ y \in Z \Rightarrow x * y = xy + 1 \in Z$

Sí la cumple.

— *Propiedad asociativa:* $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = (x * y)z + 1 = (xy + 1)z + 1 = xyz + z + 1$$

$$x * (y * z) = x(y * z) + 1 = x(yz + 1) = xyz + x + 1$$

No la cumple: $(x * y) * z \neq x * (y * z)$

— *Elemento neutro:* $x * e = x$

$$x * e = xe + 1 = x \Rightarrow e = \frac{x-1}{x}$$

No la cumple, porque e varía según el valor de x.

— *Propiedad conmutativa:* $x * y = y * x$

$$x * y = xy + 1$$

$$y * x = yx + 1$$

Sí la cumple.

La operación $x * y = xy + 1$ es interna y conmutativa.

3) La operación: $x * y = y$ tiene las propiedades:

— *Operación interna:* $\forall x,\ y \in \mathbf{Z} \Rightarrow x * y = y \in \mathbf{Z}$

Sí la cumple.

— *Propiedad asociativa:* $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = z$$

$$x * (y * z) = y * z = z$$

Se cumple

— *Elemento neutro:* $x * e = e * x = x$

$$\left.\begin{array}{l} x * e = e \\ e * x = x \end{array}\right\} e = x$$

No la cumple.

— *Propiedad conmutativa:* $x * y = y * x$

$$x * y = y$$

$$y * x = x$$

No la cumple: $x * y \neq y * x$

La operación: $x * y = y$ es interna y asociativa.

2. *En el conjunto Z de los números enteros se definen las operaciones:*

1) $a * b = ab^2$

2) $a * b = ab - a - b + 2$

3) $a * b = a + 2b$

¿Qué propiedades tiene cada operación?

Solución

1) $a * b = ab^2$ es operación interna.

2) $a * b = ab - a - b + 2$ es operación interna, asociativa, el elemento netro es $e = 2$, el simétrico a' no existe, ya que $a' = \frac{a}{a-1}$, que no siempre tendrá solución en Z y es conmutativa.

3) $a * b = a + 2b$ es operación interna.

3. *En el conjunto Q de los números racionales se definen las operaciones:*

$$1)\quad a \circ b = \frac{ab}{a+b} \qquad \text{en } Q \times Q - \{(x,\ y) \mid x = -y\}$$

$$2)\quad a \circ b = \frac{a+b}{1-ab} \qquad \text{en } Q \times Q - \left\{(x,\ y) \mid x = \frac{1}{y}\right\}$$

¿Qué propiedades tiene cada operación?

Solución

1) La operación: $a \circ b = \dfrac{ab}{a+b}$ tiene las propiedades:

— *Operación interna:* $\forall a,\ b \in Q \Rightarrow a \circ b = \dfrac{ab}{a+b} \in Q$

Sí la cumple.

— *Propiedad asociativa:* $\forall a,\ b,\ c \in Q \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

$$(a \circ b) \circ c = \frac{(a \circ b)c}{(a \circ b) + c} = \frac{\dfrac{ab}{a+b} \cdot c}{\dfrac{ab}{a+b} + c} = \frac{\dfrac{abc}{a+b}}{\dfrac{ab + (a+b)c}{a+b}} = \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

$$a\circ(b\circ c)=\frac{a(b\circ c)}{a+(b\circ c)}=\frac{a\dfrac{bc}{b+c}}{a+\dfrac{bc}{b+c}}=\frac{\dfrac{abc}{b+c}}{\dfrac{a(b+c)+bc}{b+c}}=\frac{abc}{ab+ac+bc}$$

Sí la cumple

— *Elemento neutro:* $\forall a \in Q \quad a\circ e=e\circ a=a$

$$a\circ e=\frac{ae}{a+e}=a \Rightarrow ae=a^2+ea \Rightarrow a=0$$

$$e\circ a=\frac{ea}{e+a}=a \Rightarrow ea=ea+a^2 \Rightarrow a=0$$

El elemento neutro no existe.

— *Propiedad conmutativa:* $a\circ b=b\circ a$

$$a\circ b=\frac{ab}{a+b} \qquad b\circ a=\frac{ba}{b+a}$$

Sí la cumple.

La operación $a\circ b=\dfrac{ab}{a+b}$ es interna, asociativa y conmutativa.

2) La operación $a\circ b=\dfrac{a+b}{1-ab}$ tiene las propiedades:

— *Operación interna:* $\forall a,\ b \in Q \Rightarrow a\circ b=\dfrac{a+b}{1-ab} \in Q.$

Sí la cumple.

— *Propiedad asociativa:* $\forall a,\ b,\ c \in Q \quad (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

$$(a\circ b)\circ c=\frac{(a\circ b)+c}{1-(a\circ b)c}=\frac{\dfrac{a+b}{1-ab}+c}{1-\dfrac{a+b}{1-ab}c}=\frac{\dfrac{a+b+c-abc}{1-ab}}{\dfrac{1-ab-ac-bc}{1-ab}}=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$$

$$a\circ(b\circ c)=\frac{a+(b\circ c)}{1-a(b\circ c)}=\frac{a+\dfrac{b+c}{1-bc}}{1-a\dfrac{b+c}{1-bc}}=\frac{\dfrac{a-abc+b+c}{1-bc}}{\dfrac{1-bc-ab-ac}{1-bc}}=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$$

Sí la cumple.

— *Elemento neutro:* $\forall a \in Q \quad a\circ e=e\circ a=e$

$$a\circ e=\frac{a+e}{1-ae}=a \Rightarrow a+e=a-a^2e \Rightarrow e=0$$

Tiene elemento neutro $e=0$.

— *Elemento simétrico:* $\forall a \in Q \quad a\circ a'=a'\circ a=e$

$$a\circ a'=\frac{a+a'}{1-aa'}=0 \Rightarrow a'=-a$$

Tiene elemento simétrico $a'=-a$.

— *Propiedad conmutativa:* $a\circ b=b\circ a$

$$a\circ b=\frac{a+b}{1-ab} \qquad b\circ a=\frac{b+a}{1-ba}$$

Sí la cumple.

La operación $a\circ b=\dfrac{a+b}{1-ab}$ es interna, asociativa, tiene elemento neutro, elemento simétrico y es conmutativa.

4. *En el conjunto Q de los números racionales, se definen las operaciones:*

1) $x\circ y=\dfrac{x+y}{2}$

2) $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ *en* $Q\times Q-\left\{(x,\ y)\,|\,x=-\dfrac{1}{y}\right\}$

¿Qué propiedades tiene cada operación?

Solución

1) $x \circ y = \dfrac{x+y}{2}$ es operación interna y tiene la propiedad conmutativa.

2) La operación $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ es interna, asociativa, posee elemento neutro, y el simétrico de a es $-a$, teniendo también la propiedad conmutativa.

5. *En el conjunto*

$$A = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$$

Se define la operación: $a * b = a + 2b$.

Se pide:

*1) ¿Es la operación * interna en A?*

2) Determinar:

$$(-2) * (-1)$$
$$2 * (-3)$$
$$2 * (-2)$$

3) Formar el conjunto M de parejas $(a,\ b)$ *de elementos de A tales que:* $a \in A$, $b \in A$ *y* $a * b \in A$.

Solución

1) Formamos la tabla

$*$	-3	-2	-1	0	1	2
-3	—	—	—	-3	-1	1
-2	—	—	—	-2	0	2
-1	—	—	-3	-1	1	—
0	—	—	-2	0	2	—
1	—	-3	-1	1	—	—
2	—	-2	0	2	—	—

No es operación interna ya que el componer elementos de A mediante la operación $*$ no siempre resultan elementos de A.

2) $(-2)*(-1)=-4 \notin A$

$2*(-3)=-4 \notin A$

$2*(-2)=-2 \in A$

3) El conjunto M a la vista de la tabla anterior está formado por:

$$M=\{-1,\ 0\}$$

6. *Comprobar que el conjunto $C=\{e, a, b, c, d\}$ con la operación $*$ definida en la tabla da lugar a que $(C, *)$ sea un grupo:*

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

Solución

1)

— *Operación interna:* Todo elemento de la tabla pertenece a C, luego $\forall x,\ y \in C \Rightarrow x * y \in C$.

— *Propiedad asociativa:* $\forall x,\ y,\ z \in C\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

Tomando tres elementos cualesquiera a, b, c

$$\left.\begin{array}{l}(a * b) * c = c * c = a \\ a * (b * c) = a * e = a\end{array}\right\} \text{Se cumple}$$

Con otros tres elementos cualesquiera a, c, d

$$\left.\begin{array}{l}(a * c) * d = d * d = c \\ a * (c * d) = a * b = c\end{array}\right\} \text{Se cumple}$$

Elegidos tres elementos cualesquiera se cumple la propiedad asociativa.

— *Elemento neutro:* $\forall x \in C$ el elemento neutro es e porque operado con cualquier otro da este otro.

— *Elemento simétrico:*

El simétrico de e es e porque $e * e = e$

El simétrico de a es d porque $a * d = e$

El simétrico de b es c porque $b * c = e$

El simétrico de c es b porque $c * b = e$

El simétrico de d es a porque $d * a = e$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall x, y \in C \quad x * y = y * x$.

Trazando la diagonal principal todos los elementos situados por encima tienen su simétrico por debajo.

Por tanto $(C, *)$ es grupo abeliano.

7. *En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se ha definido la operación $*$ dada por la tabla adjunta:*

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	4	2	3
2	2	3	0	4	1
3	3	4	1	0	2
4	4	2	3	1	0

Se pide:

1) *¿Qué propiedades tiene?*

2) *¿Es $(A, *)$ grupo?*

Solución

1) Tiene las propiedades:

— Operación interna.

— Elemento neutro (el 0).

— Elemento simétrico (de 0 es 0, de 1 es 1, de 2 es 2, de 3 es 3 y de 4 es 4).

2) (A, *) no es grupo por no cumplir la propiedad asociativa ya que

$$(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$$

8. *Demostrar que los elementos*

$$A=(1,\ 0);\ B=(-1,\ 0);\ C=(0,\ 1)\ \text{y}\ D=(0,\ -1)$$

*forman un grupo respecto de la ley * definida así:*

$$(a,\ b) * (c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

Solución

Formamos la tabla

*	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	B	A
D	D	C	A	B

A la vista de la misma se verifican las propiedades:

— Operación interna

— Propiedad asociativa

— Elemento neutro es $A=(1, 0)$

— Elemento simétrico:

El de $A=(1, 0)$	es $A=(1,0)$
El de $B=(-1, 0)$	es $B=(-1, 0)$
El de $C=(0, 1)$	es $D=(0, -1)$
El de $D=(0, -1)$	es $C=(0, 1)$

— Propiedad conmutativa: La tabla es simétrica respecto a la diagonal principal.

Se trata de un grupo abeliano

9. *Demostrar que $(Z, *)$ tiene estructura de grupo abeliano siendo la operación definida* $*$

$$\forall x, y \in Z \qquad x * y = x + y + n \qquad \text{siendo } n \text{ (fijo)} \in Z$$

Solución

— *Operación interna:* Se cumple porque la suma de dos números enteros más otro fijo $n \in Z$ siempre es otro entero.

— *Propiedad asociativa:* $\forall x, y, z \in C$ $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = (x * y) + z + n = (x + y + n) + z + n = x + y + z + 2n$$

$$x * (y * z) = x + (y * z) + n = x + (y + z + n) + n = x + y + z + 2n$$

— *Elemento neutro:* $\forall x \in Z \Rightarrow x * e = e * x = x$

$$x * e = x + e + n = x \Rightarrow e = -n$$

— *Elemento simétrico:* $\forall x \in Z \Rightarrow x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = x + x' + n = -n \Rightarrow x' = -x - 2n$$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall x, y \in Z$ $x * y = y * x$

$$x * y = x + y + n$$

$$y * x = y + x + n$$

Se cumple que $(Z, *)$ es grupo abeliano

10. *En el conjunto Q de los números racionales se considera la operación $*$ dada de la siguiente forma:*

$$\forall a, b \in Q \qquad a * b = a + b + ab$$

Se pide:

1) ¿Qué propiedades tiene?

2) ¿Dan lugar a alguna estructura conocida?.

Solución

1) Las propiedades que cumple son:

— Operación interna

— Propiedad asociativa

— Elemento neutro $(e = 0)$

— Elemento inverso $a' = \dfrac{-a}{1+a}$

— Propiedad conmutativa

Para $a = -1$ no tiene ni elemento neutro ni elemento inverso

2) $(Q, *)$ es semigrupo conmutativo con elemento neutro

$(Q - \{1\}, *)$ es grupo abeliano.

11. *Se considera el conjunto $A = R^* x Z$ $(R^* = R - \{0\})$ en el que se define la siguiente operación:*

$$(x, n) * (y, m) = (x \cdot y, n + m), \qquad \forall (x, n); (y, m) \in A$$

Probar que $(A, *)$ es grupo abeliano

Solución

— La operación es interna

— Propiedad asociativa

$[(x, n) * (y, m)] * (z, p) = (x, n) * [(y, m) * (z, p)]$

$(xy, n+m) * (z, p) = (x, n) * (yz, m+p)$

$[(xy)z, (n+m)+p] = [x(yz), n+(m+p)]$

— Elemento neutro es (1, 0)

$$(x, n) * (1, 0) = (x \cdot 1, n+0) = (x, n)$$

— Elemento simétrico

$(x, n) * (x', n') = (1, 0) \Rightarrow$

$$(x \cdot x', n+n') = (1, 0) \Rightarrow \begin{cases} x x' = 1 \\ n+n' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ n' = -n \end{cases}$$

$$(x', n') = \left(\frac{1}{x}, -n\right)$$

— Propiedad conmutativa

$(x, n) * (y, m) = (y, m) * (x, n)$

$(xy, n+m) = (yx, m+n)$

Por tanto

$$(A, *) \text{ es grupo abeliano}$$

12. *En un grupo conmutativo G, se pide resolver la siguiente ecuación*

$$abxc = cxax$$

Solución

Al ser el grupo conmutativo la ecuación se puede poner de la forma siguiente:

$$abxc = acxx$$
$$a^{-1}(abxc) = a^{-1}(acxx)$$
$$(a^{-1}a)(bxc) = (a^{-1}a)cxx$$
$$bxc = xxc$$
$$(bxc)c^{-1} = (xxc)c^{-1}$$
$$bx(cc^{-1}) = xx(cc^{-1})$$
$$bx = xx$$
$$(bx)x^{-1} = (xx)x^{-1}$$
$$b(xx^{-1}) = x(xx^{-1})$$
$$b = x$$

13. *En un grupo no conmutativo G, se pide resolver la siguiente ecuación:*

$$axcb = abc$$

Solución

$$axcb = abc \Leftrightarrow a^{-1}(axcb) = a^{-1}(abc) \Leftrightarrow$$
$$xcb = bc \Leftrightarrow (xcb)b^{-1} = (bc)b^{-1} \Leftrightarrow$$
$$xc = bcb^{-1} \Leftrightarrow (xc)c^{-1} = (bcb^{-1})c^{-1} \Leftrightarrow$$
$$x = bcb^{-1}c^{-1}$$

14. *Se considera el grupo abeliano* $(G, \circ)$ *y se define en G una segunda operación* $*$ *de la siguiente manera:*

$$x * y = a \circ x \circ y$$

Siendo a un elemento fijo de G distinto del elemento neutro.

Demostrar que $(G, *)$ *es grupo abeliano.*

Solución

— *Operación interna:* $\forall x,\ y \in G \Rightarrow x * y \in G$, se cumple

— *Propiedad asociativa:* $\forall x,\ y,\ z \in G \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = (a \circ x \circ y) * z = a \circ (a \circ x \circ y) \circ z = a \circ a \circ x \circ y \circ z$$

$$x * (y * z) = a \circ x \circ (y * z) = a \circ x \circ (a \circ y \circ z) = a \circ a \circ x \circ y \circ z$$

La cumple

— *Elemento neutro:* $\forall x \in G \Rightarrow x * e = e * x = x$

$$\left.\begin{array}{l} x * e = a \circ x \circ e \\ e * x = a \circ e \circ x \end{array}\right\} a \circ x \circ e = x \Rightarrow e = a^{-1}$$

— *Elemento simétrico:* $\forall x \in G \Rightarrow x * x' = x' * x = e$

$$\left.\begin{array}{l} x * x' = a \circ x \circ x' \\ x' * x = a \circ x' \circ x \end{array}\right\} a \circ x \circ x' = a^{-1} \Rightarrow x' = a^{-1} \circ a^{-1} \circ x^{-1}$$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall x,\ y \in G \Rightarrow x * y = y * x$

$$x * y = a \circ x \circ y = a \circ y \circ x = y * x$$

Por tanto $(G, *)$ es grupo abeliano o conmutativo

15. *En el conjunto $R \times R \times R$ se define la siguiente operación:* $(a_1, a_2, a_3) * (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3 + a_1 b_2)$

Demostrar que $(R \times R \times R, *)$ es grupo.

Solución

— *Operación interna:* Se cumple por la definición de la operación.

— *Propiedad asociativa:*

$$[(a_1, a_2, a_3) * (b_1, b_2, b_3)] * (c_1, c_2, c_3) = (a_1, a_2, a_3) * [(b_1, b_2, b_3) * (c_1, c_2, c_3)]$$

Desarrollando los dos miembros se obtiene:

$(a_1+b_1+c_1,\ a_2+b_2+c_2,\ a_3+b_3+c_3+b_1c_2+a_1b_2+a_1c_2)$

— *Elemento neutro:* Existe, y es $(0, 0, 0)$, pues:

$(a_1,\ a_2,\ a_3) * (0, 0, 0) = (0, 0, 0) * (a_1,\ a_2,\ a_3) = (a_1,\ a_2,\ a_3)$

— *Elemento simétrico:*

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) * (a'_1,\ a'_2,\ a'_3) = (0, 0, 0)$$

de donde:

$$(a'_1,\ a'_2,\ a'_3) = (-a_1,\ -a_2,\ -a_3+a_1a_2)$$

Por lo tanto, $(R \times R \times R, *)$ es grupo.

16. *En el conjunto $R \times R^*$ se define la operación:*

$$(a,\ b) \circ (c,\ d) = (bc+a,\ bd)$$

Demostrar que $(R \times R^*, \circ)$ es grupo pero no grupo conmutati vo.

Solución

— *Operación interna:* Se cumple por la propia definición.

— *Propiedad asociativa:*

$$[(a,\ b) \circ (c,\ d)] \circ (e,\ f) = (a,\ b) \circ [(c,\ d) \circ (e,\ f)]$$

Desarrollando los dos miembros se llega en ambos a la siguien te expresión:

$$(bde+bc+a,\ bdf)$$

— *Elemento neutro:*

$$(a,\ b) \circ (m,\ n) = (a,\ b)$$

de donde

$$(bm+a,\ bn) = (a,\ b)$$

e igualando:

$$\left.\begin{aligned} bm+a&=a \\ bn&=b \end{aligned}\right\} \Rightarrow m=0,\ n=1$$

El elemento neutro es (0, 1).

— *Elemento simétrico:*

$$(a,\ b)\circ(a',\ b')=(0,\ 1)$$

$$(ba'+a,\ bb')=(0,\ 1) \Rightarrow \begin{cases} ba'+a=0 \\ bb'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=-\dfrac{a}{b} \\ b'=\dfrac{1}{b} \end{cases}$$

El simétrico de (a, b) es $\left(-\dfrac{a}{b},\ \dfrac{1}{b}\right)$

— *Propiedad conmutativa:*

$$\left.\begin{aligned} (a,\ b)\circ(c,\ d)&=(bc+a,\ bd) \\ (c,\ d)\circ(a,\ b)&=(da+c,\ bd) \end{aligned}\right. \Rightarrow (bc+a,\ bd)\neq(da+c,\ bd) \Rightarrow \text{No la cumple.}$$

$(R\times R^{*},\ \circ)$ es grupo pero no conmutativo.

17. *En el conjunto Q de los números racionales se define la operación $*$ así:*

$$a * b = 7a + mab + 7b - 7$$

Se pide:

1) ¿Qué valor tiene el parámetro m para que exista elemento neutro?

2) Una vez obtenido el valor de m, determinar los elementos de Q que tienen simétrico.

3) Comprobar si se cumple la propiedad distributiva de $*$ respecto de la suma tomando como elementos $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

Solución

1) Por definición: $a * e = a$

$$a * e = 7a + mae + 7e - 7 = a \Rightarrow$$

$$m = -6 \text{ y } e = 1$$

2) Por definición: $a * a' = e = 1$

$$a * a' = 7a - 6aa' + 7a' - 7 = 1$$

$$a'(7 - 6a) = 8 - 7a$$

$$a' = \frac{8 - 7a}{7 - 6a} \quad \left(a \neq \frac{7}{6}\right)$$

3) Propiedad distributiva:

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{1}{2} * \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} * \frac{5}{6}\right)$$

Desarrollamos cada miembro:

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} * \frac{13}{6} = \frac{1}{2} \cdot 7 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{6} + 7 \cdot \frac{13}{6} - 7 = \frac{31}{6}$$

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} * \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{7}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 7 \cdot \frac{4}{3} - 7\right) + \left(\frac{7}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + 7 \cdot \frac{5}{6} - 7\right) = \frac{10}{6}$$

Por lo tanto, $\frac{31}{6} \neq \frac{10}{6}$ y no es distributiva.

18. *En el conjunto Q se define la operación:*

$$x \circ y = x + 4xy + y$$

Se pide:

1) Estructura de $\left(Q - \left\{-\frac{1}{4}\right\}, \circ\right)$

2) *Simétrico de* $-\frac{2}{5}$

3) *Determinar si* $\frac{4}{3} \circ \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{4}{3} \circ \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{3} \circ \frac{3}{5}\right)$

Solución

1) $\left(Q-\left\{-\frac{1}{4}\right\}, \circ\right)$ es grupo abeliano, siendo el elemento neutro $e=0$ y el simétrico de x es $x'=-\frac{x}{1+4x}$.

2) El simétrico de $-\frac{2}{5}$ es:

$$x'=\frac{\frac{2}{5}}{1-4 \cdot \frac{2}{5}}=-\frac{2}{3}$$

3) $\frac{4}{3} \circ \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right) \neq \left(\frac{4}{3} \circ \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{3} \circ \frac{3}{5}\right)$

No se cumple la igualdad.

19. *Probar que el conjunto* $C=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, *cuyos elementos son las aplicaciones:*

$$f_1(x)=x; \quad f_2(x)=\frac{1}{x}; \quad f_3(x)=1-x; \quad f_4(x)=\frac{1}{1-x}; \quad f_5(x)=\frac{x-1}{x};$$

$$f_6(x)=\frac{x}{x-1}$$

tiene estructura de grupo respecto de la ley de composición

$$f_j \circ f_i(x)=f_j[f_i(x)]$$

Hallar los subgrupos.

Solución

Para ver si forman grupo, en primer lugar hay que comprobar si la operación $\circ$ es interna, para ello se forma la tabla adjunta:

$$f_3 \circ f_2(x) = f_3[f_2(x)] = f_3\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = f_5(x)$$

$$f_5 \circ f_3(x) = f_5\ [f_3(x)] = f_5(1-x) = \frac{(1-x)-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_6(x)$$

y así sucesivamente, obteniéndose:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Es operación interna.

— *Propiedad asociativa:* Tomando tres elementos de C, por ejemplo, f_2, f_4, f_6 se cumplirá:

$$f_2 \circ (f_4 \circ f_6) = (f_2 \circ f_4) \circ f_6$$

$$[f_2 \circ (f_4 \circ f_6)](x) = f_2\{f_4[f_6(x)]\} = f_2\left[f_4\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = f_2\left[\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}\right] =$$

$$= f_2\left(\frac{x-1}{x-1-x}\right) = f_2(1-x) = \frac{1}{1-x} = f_4(x)$$

$$(f_2 \circ f_4) \circ f_6(x) = f_2 \circ f_4\left(\frac{x}{x-1}\right) = f_2\left[f_4\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = f_2\left(\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}\right) =$$

$$=f_2(1-x)=\frac{1}{1-x}=f_4(x)$$

— *Elemento neutro:* Es f_1, porque $f_1 * f_i = f_i * f_1 = f_i$.

— *Elemento inverso:* A la vista de la tabla:

El inverso de f_1 es f_1

El inverso de f_2 es f_2

El inverso de f_3 es f_3

El inverso de f_4 es f_5

El inverso de f_5 es f_4

El inverso de f_6 es f_6

— *Propiedad conmutativa:* No todo elemento de la tabla tiene su simétrico respecto de la diagonal principal.

Por lo tanto, $(C, \circ)$ es grupo.

Son posibles los siguientes subgrupos:

$\circ$	f_1	f_2
f_1	f_1	f_2
f_2	f_2	f_1

$\circ$	f_1	f_3
f_1	f_1	f_3
f_3	f_3	f_1

$\circ$	f_1	f_6
f_1	f_1	f_6
f_6	f_6	f_1

$\circ$	f_1	f_4	f_5
f_1	f_1	f_4	f_5
f_4	f_4	f_5	f_1
f_5	f_5	f_1	f_4

$H_1=\{f_1, f_2\}$, $H_2=\{f_1, f_3\}$, $H_3=\{f_1, f_6\}$, $H_4=\{f_1, f_4, f_5\}$

ya que respecto a la operación $\circ$ tienen estructura de grupo.

20. *Probar que el conjunto $G=\{f_1, f_2, f_3\}$ cuyos elementos son las aplicaciones*

$$f_1(x)=x \qquad f_2(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}} \qquad f_3(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}$$

tiene estructura de grupo respecto de la ley de composición

$$f_j \circ f_i(x)=f_j[f_i(x)]$$

Solución

— La operación es interna según se desprende del cuadro adjunto

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

— Verifica la propiedad asociativa

— Elemento neutro es f_1

— El simétrico de f_1 es f_1, el de f_2 es f_3 y el de f_3 es f_2

— Es conmutativa

Por lo tanto $(G, \circ)$ es grupo abeliano

21. *Demostrar que* $C=\left\{\dfrac{1+3a}{1+3b}\middle| a,\, b \in Z\right\}$ *con la operación producto ordinario es un subgrupo de* $(Q^*, \cdot)$ siendo $Q^* = Q - \{0\}$

Solución

Las operaciones que verifica son las siguientes:

— *Operación interna*

$$\frac{1+3a}{1+3b}\cdot\frac{1+3c}{1+3d}=\frac{1+3(a+c+3ac)}{1+3(b+d+3bd)}\in C$$

La cumple

— *Propiedad asociativa:* Tomando tres elementos de C se comprueba fácilmente y es consecuencia de que al ser C un subconjunto de Q^* y ser $(Q^*, \cdot)$ grupo, C admite la propiedad asociativa

— *Elemento neutro:* Existe y vale $\frac{1}{1}$

— *Elemento simétrico:* El simétrico de

$\frac{1+3a}{1+3b}$ es $\frac{1+3b}{1+3a}$ pues su producto es $\frac{1}{1}$

— *Propiedad conmutativa:*

$$\frac{1+3a}{1+3b} \cdot \frac{1+3c}{1+3d} = \frac{1+3c}{1+3d} \cdot \frac{1+3a}{1+3b}$$

Por tanto (C, ·) es grupo y subgrupo de (Q^*, ·).

22. *Demostrar que el conjunto $C = \{2^a \cdot 3^b | a, b \in Z\}$ con la operación producto ordinario es un subgrupo de (R^*, ·) siendo $R^* = R - \{0\}$*

Solución

Las operaciones que cumple son:

— *Operación interna:*

$$(2^a \cdot 3^b) \cdot (2^c \cdot 3^d) = 2^{a+c} \cdot 3^{b+d} \in C$$

— *Propiedad asociativa:* La cumple

— *Elemento neutro:* Es $2^0 \cdot 3^0$ pues

$$(2^a \cdot 3^b) \cdot (2^0 \cdot 3^0) = 2^a \cdot 3^b$$

— *Elemento simétrico:* El simétrico de $2^a 3^b$ es $2^{-a} 3^{-b}$ pues $(2^a 3^b)(2^{-a} 3^{-b}) = 2^0 3^0$

— *Propiedad conmutativa:* También la verifica.

Por lo tanto (C, ·) es grupo y subgrupo de (R^*, ·)

23. *Se considera el grupo multiplicativo de los restos de Z módulo 5. Demostrar que es grupo cíclico e indicar el generador.*

Solución

El conjunto Z de los números enteros clasificados módulo 5 son:

$\bar{0}=\{ ..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ... \}$

$\bar{1}=\{ ..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, ... \}$

$\bar{2}=\{ ..., -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, ... \}$

$\bar{3}=\{ ..., -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, ... \}$

$\bar{4}=\{ ..., -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, ... \}$

Formamos la tabla de multiplicar excluyendo la clase $\bar{0}$ resultando:

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tiene estructura de grupo y además es cíclico siendo elementos generadores el $\bar{3}$ y el $\bar{2}$ pues:

$\bar{3}^0=\bar{1}$ $\qquad \bar{2}^0=\bar{1}$

$\bar{3}^1=\bar{3}$ $\qquad \bar{2}^1=\bar{2}$

$\bar{3}^2=\bar{4}$ $\qquad \bar{2}^2=\bar{4}$

$\bar{3}^3=\bar{2}$ $\qquad \bar{2}^3=\bar{3}$

24. *Se considera el grupo multiplicativo de los restos de Z módulo 7. Demostrar que es grupo cíclico e indicar el generador.*

Solución

La tabla de multiplicar excluyendo el $\overline{0}$ es:

	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Existen dos generadores de este grupo cíclico, el $\overline{3}$ y el $\overline{5}$.

25. *En el conjunto* $G=\{1, -1, x, -x, x^2, -x^2\}$ *se define la operación de multiplicar, siendo* $x^3=1$ *y* $x\neq 1$.

Se pide:

1) Formar la tabla de multiplicar y ver si tiene estructura de grupo.

2) Hallar en caso afirmativo los subgrupos H de G

3) ¿Se puede considerar que $(G, \cdot)$ *es un grupo cíclico? ¿Cual es el elemento generador?*

Solución

1) Formamos la tabla de multiplicar:

	1	-1	x	$-x$	x^2	$-x^2$
1	1	-1	x	$-x$	x^2	$-x^2$
-1	-1	1	$-x$	x	$-x^2$	x^2
x	x	$-x$	x^2	$-x^2$	1	-1
$-x$	$-x$	x	$-x^2$	x^2	-1	1
x^2	x^2	$-x^2$	1	-1	x	$-x$
$-x^2$	$-x^2$	x^2	-1	1	$-x$	x

Veamos las propiedades:

— *Operación interna:* La cumple

— *Propiedad asociativa:* Tomando tres elementos cualesquiera, por ejemplo -1, x y x^2 vemos que:

$$[(-1)x]x^2=(-1)(x\cdot x^2)$$

— *Elemento neutro:* Es el 1

— *Elemento simétrico:* El simétrico de 1 es 1, el de -1 es -1, el de x es x^2, el de $-x$ es $-x^2$, el de x^2 es x y el de x^2 es $-x$

— *Propiedad conmutativa:* Se cumple al ser la tabla simétrica respecto su diagonal principal.

Por tanto $(G, \cdot)$ es grupo abeliano.

2) Los subgrupos que se pueden formar son:

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$H_1=\{1, -1\}$

	1	x	x^2
1	1	x	x^2
x	x	x^2	1
x^2	x^2	1	x

$H_2=\{1, x, x^2\}$

3) Se puede considerar que (G, $\cdot$) es un grupo cíclico ya que las potencias sucesivas de $(-x)$ son los elementos de G.

El elemento $(-x)$ recibe el nombre de generador del grupo cíclico (G, $\cdot$), pues:

$$\begin{array}{ll} (-x)^0 = \ \ 1 & (-x)^3 = -1 \\ (-x)^1 = -x & (-x)^4 = \ \ x \\ (-x)^2 = \ \ x^2 & (-x)^5 = -x^2 \end{array}$$

Otro elemento generador es $-x^2$

$$\begin{array}{ll} (-x^2)^0 = \ \ 1 & (-x^2)^3 = -1 \\ (-x^2)^1 = -x^2 & (-x^2)^4 = \ \ x^2 \\ (-x^2)^2 = \ \ x & (-x^2)^5 = -x \end{array}$$

26. *En el conjunto $G = \{1, -1, i, -i\}$ se define la operación de multiplicar, siendo $i^2 = -1$.*

Se pide:

1) Formar la tabla de multiplicar y ver si (G, $\cdot$) es grupo.

2) Hallar los subgrupos H de G.

3) ¿Se puede considerar que (G, $\cdot$) es grupo cíclico? ¿Cuál es el elemento generador?

Solución

1) Formamos la tabla de multiplicar:

	1	−1	i	−i
1	1	−1	i	−i
−1	−1	1	−i	i
i	i	−i	−1	1
−i	−i	i	1	−1

Se deduce de la misma que (G, $\cdot$) es grupo abeliano, siendo el elemento neutro 1.

2) El único subgrupo que hay es $H=\{1, -1\}$.

3) $(G, \cdot)$ es grupo cíclico, siendo el elemento generador i o $-i$, pues:

$$\begin{array}{ll} (i)^0=1 & (-i)^0=1 \\ i^1=i & (-i)^1=-i \\ i^2=-1 & (-i)^2=-1 \\ i^3=-i & (-i)^3=i \end{array}$$

27. *Probar que el conjunto $G=\{(a, b)/a, b \in Q, a \neq 0\}$ con la ley de composición $*$*

$$(a, b) * (c, d)=(ac, bc+d)$$

forma grupo. ¿Es conmutativo?

Probar que el conjunto $H=\{(1, b)/b \in Q\}$ es subgrupo de G.

Solución

1) Para ver que $(G, *)$ sea grupo hay que comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

— *Operación interna:* $\forall (a, b), (c, d) \in G \Rightarrow (a, b) * (c, d) \in G$.

— *Propiedad asociativa:* $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in G$

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f)=(a, b) * [(c, d) * (e, f)]$$

En efecto,

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f)=(ac, bc+d) * (e, f)=(ace, bce+de+f)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)]=(a, b) * (ce, de+f)=(ace, bce+de+f)$$

— *Elemento neutro:*

$$(a, b) * (i, j)=(a, b)$$

$$(a, b) * (i, j)=(ai, bi+j)=(a, b) \Rightarrow \begin{cases} i=1 \\ j=0 \end{cases}$$

El elemento neutro es (1, 0).

— *Elemento simétrico:* Operando por la derecha:

$$(a, b) * (m, n) = (1, 0) \Rightarrow (am, bm+n) = (1, 0) \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{a} \\ n = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Operando a la izquierda:

$$(m, n) * (a, b) = (ma, na+b) = (1, 0) \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{a} \\ n = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

El simétrico de (a, b) es $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right)$

— *Propiedad conmutativa:* No se cumple.

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc+d)$$

$$(c, d) * (a, b) = (ca, da+b)$$

$$(a, b) * (c, d) \neq (c, d) * (a, b)$$

Por lo tanto, (G, $*$) es grupo no conmutativo.

2) Para probar que H es subgrupo de G, tomando dos elementos (1, a) y (1, b) de H se cumple:

$$(1, a) * (1, b)' = (1, a) * (1, -b) = (1, a-b) \in H$$

Se cumple que H es subgrupo de G.

28. *Se considera el conjunto $G = \{(a, b)/a, b \in R \text{ y } a \neq 0\}$ con la ley de composición $*$*

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad+b)$$

Se pide:

1) ¿Es grupo $(G, *)$.

2) Probar que $H = \{(a, 0) / a \in R\} \subset G$ con la operación $*$ es un subgrupo de G?

Solución

1) Es grupo. El elemento neutro es $(1, 0)$ y el simétrico de (a, b) es $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$

2) H es subgrupo de G, pues:

$$(a, 0) * (c, 0)' = (a, 0) * \left(\frac{1}{c}, 0\right) = \left(\frac{a}{c}, 0\right) \in H.$$

29. *Hallar para qué valores de $m \in Z$ ls operaciones:*

$$x * y = x + y - 6$$

$$x \circ y = xy + mx + my + 42$$

inducen en el conjunto Z de los enteros una estructura de anillo.

Solución

1) Respecto a la operación $*$ se verifican las siguientes propiedades:

— *Operación interna:* $\forall x, y \in Z \Rightarrow x * y \in Z$

— *Propiedad asociativa:* $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$\left.\begin{array}{l} (x * y) * z = (x * y) + z - 6 = (x + y - 6) + z - 6 = x + y + z - 12 \\ x * (y * z) = x + (y * z) - 6 = x + (y + z - 6) - 6 = x + y + z - 12 \end{array}\right\}$$

$\forall x, y, z \in Z$ se cumple.

— *Elemento neutro:* $\forall x \in Z \quad x * e = e * x = x$

$$x * e = x + e - 6 = x \Rightarrow e = 6$$

— *Elemento simétrico:* $\forall x \in Z \quad x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = x + x' - 6 = 6 \Rightarrow x' = 12 - x$$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall x,\ y \in Z \qquad x * y = y * x$

$$\left.\begin{array}{l} x * y = x + y - 6 \\ y * x = y + x - 6 \end{array}\right\} \quad \text{Se cumple.}$$

$(Z, *)$ es grupo abeliano.

2) Respecto a la segunda operación $\circ$ se verifican las siguientes propiedades:

— *Operación interna:* $\forall x,\ y \in Z \Rightarrow x \circ y \in Z$

— *Propiedad asociativa:* $\forall x,\ y,\ z \in Z \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x \circ y)z + m(x \circ y) + mz + 42 = \\ &= (xy + mx + my + 42)z + m(xy + mx + my + 42) + \\ &+ mz + 42 = xyz + mxz + myz + 42z + mxy + m^2x + \\ &+ m^2y + 42m + mz + 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x(y \circ z) + mx + m(y \circ z) + 42 = x(yz + my + mz + 42) + \\ &+ mx + m(yz + my + mz + 42) + 42 = \\ &= xyz + mxy + mxz + 42x + mx + myz + m^2y + m^2z + \\ &+ 42m + 42 \end{aligned}$$

Igualando los dos miembros:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

resulta:

$$42z + m^2x + mz = 42x + mx + m^2z$$

$$m^2(x - z) + m(z - x) + 42(z - x) = 0$$

$$m^2(x - z) - m(x - z) - 42(x - z) = 0$$

$$m^2 - m - 42 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ -6 \end{array} \right.$$

Para $m=7$ y $m=-6$ se cumple la propiedad asociativa y $(Z, \circ)$ es semigrupo.

3)

— *Propiedad distributiva* de $\circ$ respecto de $*$

$$x \circ (y * z)=(x \circ y) * (x \circ z)$$

$$\begin{aligned} x \circ (y * z) &= x(y * z)+mx+m(y * z)+42= \\ &= x(y+z-6)+mx+m(y+z-6)+42= \\ &= xy+xz-6x+mx+my+mz-6m+42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \circ y) * (x \circ z) &= (x \circ y)+(x \circ z)-6=(xy+mx+my+42)+ \\ &+(xz+mx+mz+42)-6=xy+xz+2mx+ \\ &+my+mz+78 \end{aligned}$$

Igualando estos dos miembros:

$$\left.\begin{array}{l} -6x-6m=mx+36 \\ -6(x+6)=m(x+6) \end{array}\right\} \Rightarrow m=-6 \qquad (x \neq -6)$$

Considerando la propiedad distributiva por la derecha:

$$(x * y) \circ z=(x \circ z) * (y \circ z)$$

se llega a que $m=-6$.

Por lo tanto, para $m=-6$ se verifica tanto la propiedad asociativa de la operación $\circ$ como la propiedad distributiva de $\circ$ respecto $*$

$$(Z, *, \circ) \text{ es anillo para } m=-6.$$

30. *En el conjunto Z definimos las operaciones*

$$a * b=a+b-5$$
$$a \circ b=a+b-ab$$

Calcular:

1) ¿Es grupo $(Z, *)$?

2) ¿Es semigrupo $(Z, \circ)$?

3) ¿Es anillo $(Z, *, \circ)$?

Solución

1) $(Z, *)$ es grupo siendo el neutro $e=5$ y el simétrico de a es $a'=10-a$.

2) $(Z, \circ)$ es semigrupo conmutativo.

3) $(Z, *, \circ)$ no es anillo por no cumplirse la propiedad distributiva

$$a \circ (b * c) \neq (a \circ b) * (a \circ c)$$

31. *En un anillo no conmutativo se define*

$$x * y = xy - yx$$

Se pide:

1) Demostrar que la ley $*$ es doblemente distributiva respecto la adición.

2) Demostrar que:

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$$

Solución

1) Propiedades distributivas

a) $x * (y+z) = (x * y) + (x * z)$

b) $(x+y) * z = (x * z) + (y * z)$

En efecto la primera de ellas a) se comprueba así

$$x * (y+z) = x(y+z) - (y+z)x = xy + xz - yx - zx$$

$$(x * y) + (x * z) = (xy - yx) + (xz - zx) = xy - yx + xz - zx$$

Se verifica.

La segunda b) también se verifica pues

$$(x+y) * z=(x+y)z-z(x+y)=xz+yz-zx-zy$$

$$(x * z)+(y * z)=(xz-zx)+(yz-zy)=xz-zx+yz-zy$$

2) Demostramos que

$$x * (y * z)+y * (z * x)+z * (x * y)=0$$

es cierto.

En efecto:

$$x * (y * z)+y * (z * x)+z * (x * y)=x(y * z)-(y * z)x+$$
$$+y(z * x)-(z * x)y+z(x * y)-(x * y)z=x(yz-zy)-$$
$$-(yz-zy)x+y(zx-xz)-(zx-xz)y+z(xy-yx)-$$
$$-(xy-yx)z=xyz-xzy-yzx+zyx+yzx-yxz-$$
$$-zxy+xzy+zxy-zyx-xyz+yxz=0$$

32. *En un anillo no conmutativo se hace*

$$x \circ y=xy-yx$$

Probar:

1) Que es anticonmutativa: $(x \circ y)=-(y \circ x)$

2) Que $x \circ (y \circ z)-(x \circ y) \circ z=(z \circ x) \circ y$

Solución

Basta aplicar la operación definida para comprobar las dos igualdades que se presentan al igual que se hizo en el caso anterior.

33. *En* $Z \times Z=\{(a,\ b)|a,\ b \in Z\}$ *se definen las operaciones*

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$
$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac-5bd,\ ad+bc)$$

Demostrar que $(Z \times Z,\ +,\ \cdot)$ *es un anillo unitario conmutativo.*

Solución

1) Respecto de la operación $+$, las propiedades son:

— *Operación interna:* $\forall (a, b), (c, d) \in Z \times Z \Rightarrow$

$$(a, b)+(c, d) \in Z \times Z$$

— *Propiedad asociativa:*

$$[(a, b)+(c, d)]+(e, f)=(a, b)+[(c, d)+(e, f)]$$

En efecto

$$[(a, b)+(c, d)]+(e, f)=(a+c, b+d)+(e, f)=[(a+c)+e, (b+d)+f]$$

$$(a, b)+[(c, d)+(e, f)]=(a, b)+(c+e, d+f)=[a+(c+e), b+(d+f)]$$

— *Elemento neutro:* El elemento neutro es $(0, 0)$ pues

$$(a, b)+(0, 0)=(0, 0)+(a, b)=(a, b)$$

— *Elemento simétrico:*

$$(a, b)+(a', b')=(0, 0) \Rightarrow (a', b')=(-a, -b)$$

— *Propiedad conmutativa*

$$(a, b)+(c, d)=(c, d)+(a, b)$$

Por tanto $(Z \times Z, +)$ es grupo abeliano.

2) Respecto a la operación $\cdot$ las propiedades son:

— *Operación interna:* Se cumple.

— *Propiedad asociativa:*

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f)=(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$$

En efecto

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f)=(ac-5bd, ad+bc) \cdot (e, f)=$$

$$=(ace-5bde-5adf-5bcf, acf-5bdf+ade+bce)$$

$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]=(a, b) \cdot (ce-5df, cf+de)=$$

$$=(ace-5\ adf-5\ bcf-5\ bde, acf+ade-5\ bdf+bce)$$

La cumple $\forall(a, b), (c, d), (e, f) \in Z \times Z$.

— *Elemento unidad:* $(a, b) \cdot (m, n) = (a, b)$

$(a, b) \cdot (m, n) = (am - 5bn, an + bm) = (a, b)$ de donde

$$m = 1 \quad y \quad n = 0$$

El elemento unidad es $(1, 0)$.

— *Propiedad conmutativa:* $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - 5\ bd,\ ad + bc)$$
$$(c, d) \cdot (a, b) = (ca - 5db,\ da + cb)$$

La cumple.

3)

— *Propiedad distributiva*

$$(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$$

En efecto:

$$(a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b)(c + e,\ d + f) = (ac + ae - 5bd - 5bf,\ ad + af + bc + be)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) = (ac - 5\ bd,\ ad + bc) + (ae - 5\ bf,\ af + be) = (ac + ae - 5\ bd - 5\ bf,\ ad + bc + af + be)$$

La cumple.

Por lo tanto $(Z \times Z, \cdot)$ es semigrupo unitario conmutativo y $(Z \times Z, +, \cdot)$ es anillo unitario conmutativo.

34. *Sea $P(E)$ el conjunto de las partes de E en el que se definen las dos operaciones*

$$A * B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A \circ B = A \cap B$$

siendo $A, B \subset P(E)$.

Demostrar que $(P(E), *, \circ)$ es un anillo unitario conmutativo.

Solución

1) La 1.ª operación también se puede expresar así:

$$A * B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

con lo que basta aplicar una a una las propiedades y comprobar que $(P(E), *)$ es grupo abeliano. El neutro es $\varnothing$ y el simétrico de A es el mismo A.

2) Respecto a la segunda operación $\circ$ el elemento neutro es el conjunto universal E y $(P(E), \circ)$ es semigrupo unitario conmutativo.

3) Se cumple también la propiedad distributiva

$$A \circ (B * C) = (A \circ B) * (A \circ C).$$

35. *En el conjunto Z de los números enteros se definen las siguientes operaciones:*

$$a * b = a + b - 1$$

$$a \circ b = a + b - ab$$

Se pide:

1) Demostrar que $(Z, *, \circ)$ es anillo

2) *¿Es* $(Z, *, \circ)$ *dominio de integridad?*

Solución

1) Demostramos que $(Z, *)$ es grupo

— *Operación interna:* $\forall a, b \in Z \Rightarrow a * b \in Z$

— *Propiedad asociativa:* $\forall a, b, c \in Z \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$

$(a * b) * c = (a * b) + c - 1 = (a + b - 1) + c - 1 = a + b + c - 2$

$a * (b * c) = a + (b * c) - 1 = a + (b + c - 1) - 1 = a + b + c - 2$

— *Elemento neutro:* $\forall a \in Z \Rightarrow a * e = e * a = a$

$$a * e = a + e - 1 = a \Rightarrow e = 1$$

— *Elemento simétrico:* $\forall a \in Z \Rightarrow a * a' = a' * a = e$

$$a * a' = a + a' - 1 = 1 \Rightarrow a' = 2 - a$$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall a,\ b \in Z \Rightarrow a * b = b * a$

$$a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$$

Por tanto (Z, $*$) es grupo abeliano.

2) Demostramos que (Z, $\circ$) es semigrupo

— *Operación interna:* $\forall a,\ b \in Z \Rightarrow a \circ b \in Z$

— *Propiedad asociativa:* $\forall a,\ b,\ c \in Z \Rightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ b) + c - (a \circ b)c = a + b - ab + c - (a + b - ab)c =$$
$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$$a \circ (b \circ c) = a + (b \circ c) - a(b \circ c) = a + b + c - bc - a(b + c - bc) =$$
$$= a + b + c - ab - bc - ac + abc$$

— *Elemento neutro:* $\forall a \in Z \Rightarrow a \circ u = u \circ a = a$

$$a \circ u = a + u - au = a \Rightarrow u = 0$$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall a,\ b \in Z \Rightarrow a \circ b = b \circ a$

$$a \circ b = a + b - ab = b + a - ba = b \circ a$$

Por tanto (Z, $\circ$) es semigrupo unitario conmutativo.

3)

— *Propiedad distributiva* de $\circ$ respecto $*$

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \qquad \forall a,\ b,\ c \in Z$$

$$a \circ (b * c) = a + (b * c) - a(b * c) = a + (b + c - 1) - a(b + c - 1) =$$
$$= 2a + b + c - ab - ac - 1$$

$$(a \circ b) * (a \circ c) = (a \circ b) + (a \circ c) - 1 = (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1 =$$

$= 2a + b + c - ab - ac - 1$

Por tanto (Z, ∗, ∘) es anillo unitario conmutativo.

4) Para ver si se trata de un dominio de integridad hay que comprobar que no existen divisiones de cero.

Hacemos: $a \circ b = e$

$$a \circ b = a + b - ab = 1 \Rightarrow a + b(1-a) = b + a(1-b) = 1$$

$$\text{Si } a \neq 1 \Rightarrow b = \frac{1-a}{1-a} = 1$$

$$\text{Si } b \neq 1 \Rightarrow a = \frac{1-b}{1-b} = 1$$

Si el producto de dos elementos da el neutro e al menos uno de ellos ha de ser el neutro e.

Al no existir divisiones de cero (Z, ∗, ∘) es un dominio de integridad.

36. *Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo unitario conmutativo y $n \in A$ un elemento fijo. Demostrar que $I = \{x \in A \mid x \cdot n = 0\}$ es un ideal de A.*

Solución

Para que sea ideal se han de cumplir las dos condiciones:

1) $\forall x, y \in I \Rightarrow x + (-y) \in I$

2) $\left.\begin{matrix} \forall x \in I \\ \forall a \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax \in I \text{ y } xa \in I$

En efecto:

1) $x + (-y) = x - y$

$(x-y) \cdot n = xn - yn = 0 - 0 = 0 \Rightarrow x - y \in I$

2) $(ax) \cdot n = a(x \cdot n) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow ax \in I$

$(xa) \cdot n = (ax) \cdot n = a(x \cdot n) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow xa \in I$

Se trata de un ideal tanto a derecha como a izquierda.

37. *Consideremos los pares de números racionales a, b tomados en este orden* $x=(a, b)$ *con las leyes:*

$$x+y=(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$$

$$x \cdot y=(ac-bd, ad+bc)$$

Demostrar que $C=\{x|x=(a, b) \text{ con } a, b \in Q\}$ *forma un cuerpo conmutativo respecto de la suma y el producto así definidos.*

Solución

1) Respecto de la primera operación $(C, +)$ es un grupo abeliano (estudiado en el problema 33 de este capítulo).

2) Respecto de la segunda operación $\cdot$ las propiedades son:

— *Operación interna:* $\forall x, y \in C \Rightarrow x \cdot y \in C$

— *Propiedad asociativa:* $\forall x, y, z \in C \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac-bd, ad+bc) \cdot (e, f) = \\ &= [(ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e] = \\ &= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \cdot (y \cdot z) &= (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce-df, cf+de) = \\ &= [a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df)] = \\ &= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)\end{aligned}$$

Se verifica

— *Elemento unidad:* $\forall x=(a, b) \in C \exists u=(i, j) \in C|$

$$xu=ux=x$$

$$xu=(a, b) \cdot (i, j)=(ai-bj, aj+bi)=(a, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i=1, j=0 \Rightarrow u=(1, 0)$$

— *Elemento inverso:* $\forall x \in C \Rightarrow x \cdot x^{-1}=x^{-1} \cdot x=u$

$$x \cdot x^{-1} = (a,\ b)(m,\ n) = (am - bn,\ an + bm) = (1,\ 0)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} am - bn = 1 \\ bm + an = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow n = \frac{-b}{a^2 + b^2} \quad y \quad m = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

El inverso de $x = (a,\ b)$ es $x^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2},\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall x,\ y \in C \Rightarrow xy = yx$

$$x \cdot y = (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

$$y \cdot x = (c,\ d) \cdot (a,\ b) = (ca - db,\ da + cb)$$

Se verifica que (C, •) sea también grupo abeliano.

3)

— *Propiedad distributiva:*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \forall x,\ y,\ z \in C$$

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= (a,\ b) \cdot [(c,\ d) + (e,\ f)] = (a,\ b)(c + e,\ d + f) = \\ &= [a(c + e) - b(d + f),\ a(d + f) + b(c + e)] = \\ &= (ac + ae - bd - bf,\ ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y + x \cdot z &= (a,\ b) \cdot (c,\ d) + (a,\ b) \cdot (e,\ f) = \\ &= (ac - bd,\ ad + bc) + (ae - bf,\ af + be) = \\ &= (ac - bd + ae - bf,\ ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

Se verifica

Por tanto (C, +, •) es cuerpo conmutativo.

38. *Consideremos los pares de números racionales a, b tomados en este orden $x = (a,\ b)$ con las leyes*

$$x + y = (a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d)$$

$$x \cdot y = (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac + 2bd,\ ad + bc)$$

Demostrar que forman un cuerpo conmutativo.

Solución

— $(Q \times Q, +)$ es un grupo conmutativo siendo el elemento neutro $(0, 0)$ y el simétrico de $x=(a, b)$ es $x'=(-a, -b)$.

— $(Q \times Q, \cdot)$ es grupo conmutativo siendo el elemento unitario $(1, 0)$ y el inverso de $x=(a, b)$ es $x^{-1}=\left(\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2}\right)$

— Es distributivo el producto respecto de la suma.

Por tanto $(Q \times Q, +, \cdot)$ es cuerpo conmutativo.

39. *Dado $k \in Z$, se define en Z las siguientes operaciones:*

$$a * b = a + b + k$$

$$a \circ b = ab + \alpha a + \alpha b + k^2 - k$$

Se pide:

1) Hallar los valores de α para los cuales $(Z, *, \circ)$ es un anillo.

2) Averiguar si los anillos $(Z, *, \circ)$ del apartado anterior tienen o no divisores de cero.

3) Si las dos operaciones $*$ y $\circ$ se definen en Q, hallar los valores de α *para los cuales $(Q, *, \circ)$* es un cuerpo.

Solución

1) $(Z, *)$ es un grupo abeliano, siendo:

— elemento neutro: $e=-k$

— elemento simétrico de a es: $a'=-a-2k$

Sabido que una de las propiedades de los anillos es:

$$e \circ a = e \quad \forall a \in Z$$

resulta:

$$(-k) \circ a=(-k) \qquad \forall a \in Z$$

En particular para $a=1$

$$-k=(-k) \circ 1=-k+\alpha-\alpha k+k^2-k$$

de donde:

$$k-k^2=\alpha(1-k)$$

luego si $k \neq 1 \Rightarrow \alpha=k$

si $k=1 \Rightarrow -1=0 \circ (-1)=0-\alpha \Rightarrow \alpha=1$

En cualquier caso: $\alpha=k$.

Tomando $\alpha=k$, veamos si $(Z, *, \circ)$ es un anillo:

— Cumple la propiedad asociativa: $(a \circ b) \circ c=a \circ (b \circ c)$

— Cumple la propiedad conmutativa: $a \circ b=b \circ a$

— Cumple la propiedad distributiva: $a \circ (b * c)= =(a \circ b) * (a \circ c)$

— El elemento unidad también existe: $a \circ u=a$

$$a \circ u=au+k(a+u)+k^2-k=a$$

$$(1-k)(a+k)=u(a+k)$$

por tanto: $u=(1-k)$

Luego $(Z, *, \circ)$ es un anillo unitario conmutativo para $\forall x \in Z$ y $\alpha=k$.

2) Para que tenga divisores de cero

$$\forall a,\ b \in Z \qquad a \circ b=e=-k$$

$$ab+k(a+b)+k^2-k=-k$$

$$k^2+(a+b)k+ab=0$$

resolviendo esta ecuación en k

$$\begin{cases} k=-a \\ k=-b \end{cases}$$

Si $a \circ b = k \Rightarrow k = -a$ ó $k = -b$, por lo tanto no hay divisores de cero.

3) Aplicando el razonamiento análogo al visto en 1) llegaríamos a ver que $(Q, *, \circ)$ es un anillo unitario conmutativo sin divisores de cero.

Para que sea cuerpo se tiene que cumplir: $a \circ a^{-1} = u$

$$a \circ a^{-1} = aa^{-1} + k(a + a^{-1}) + k^2 - k = 1 - k$$

de donde

$$a^{-1} = \frac{1 - k(a+k)}{a+k} \qquad \forall k \text{ y } \alpha = k$$

Por tanto, existe elemento inverso y $(Q, *, \circ)$ es un cuerpo conmutativo.

40. *Determinar si las siguientes aplicaciones del grupo multiplicativo de los reales no nulos sobre una parte del mismo constituyen homomorfismo. Decir en cada caso cuál es el grupo homomorfo de aquél y citar el núcleo del homomorfismo.*

1) $f : x \longrightarrow ax\,(a \in N)$ *4)* $f : x \longrightarrow x^2$

2) $f : x \longrightarrow |x|$ *5)* $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$

3) $f : x \longrightarrow -x$ *6)* $f : x \longrightarrow -\dfrac{1}{x}$

Solución

1) $f(xy) = f(x)f(y)$

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax \\ f(y) = ay \\ f(xy) = axy \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \cdot f(y) = axay = a^2xy \\ f(xy) = axy \end{array}$$

Sólo cuando $a=1$ se verifica que $f(xy)=f(x)f(y)$. Para $\forall a \in N$ y $\neq 1 \Rightarrow$ No es homomorfismo.

2)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=|x| \\ f(y)=|y| \\ f(xy)=|xy| \end{array}\right\} \quad f(x) \cdot f(y)=|x||y|=|xy|=f(xy)$$

Sí es homomorfismo y su núcleo es $\mathrm{Ker}\, f=\{1, -1\}$, ya que $|1|=1$ y $|-1|=1$.

3)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x \\ f(y)=-y \\ f(xy=-xy \end{array}\right\} \quad f(x)f(y)=(-x)(-y)=xy \neq -xy=f(xy)$$

No es homomorfismo.

4)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ f(y)=y^2 \\ f(xy)=(xy)^2 \end{array}\right\} \quad f(x)f(y)=x^2 \cdot y^2=(xy)^2=f(xy)$$

Es homomorfismo y su núcleo es $\mathrm{Ker}\, f=\{1, -1\}$.

5)

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(y)=\frac{1}{y} \qquad f(x)f(y)=\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}=f(x\,y)$$

$$f(x\,y)=\frac{1}{xy}$$

Es homomorfismo y su núcleo es $\mathrm{Ker}\, f=\{1\}$.

6)

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f(y) = -\frac{1}{y} \qquad f(x)f(y) = \left(-\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{y}\right) \neq -\frac{1}{xy} = f(xy)$$

$$f(xy) = -\frac{1}{xy}$$

No es homomorfismo.

41. *Hallar un isomorfismo entre el grupo aditivo Z/4 y el grupo multiplicativo Z/5.*

Solución

Formamos, en primer lugar, las tablas de (Z/4, +) y de (Z/5, ·)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Existen dos isomorfismos f y g

$$f : (Z/4, +) \longrightarrow (Z/5, \cdot)$$

$$\bar{0} \longrightarrow \bar{1}$$

$$\bar{1} \longrightarrow \bar{2}$$

$$\bar{2} \longrightarrow \bar{4}$$

$$\bar{3} \longrightarrow \bar{3}$$

$$g : (Z/4, +) \longrightarrow (Z/5, \cdot)$$

$$\bar{0} \longrightarrow \bar{1}$$
$$\bar{1} \longrightarrow \bar{3}$$
$$\bar{2} \longrightarrow \bar{4}$$
$$\bar{3} \longrightarrow \bar{2}$$

42. *Sea C* el grupo multiplicativo de los complejos no nulos y G el conjunto de los complejos* $\{1, -1, i, -i\}$.

Se pide:

1) Probar que G es un subgrupo del grupo multiplicativo C.*

2) Determinar los isomorfismos de G sobre el grupo Z/4 de las clases residuales módulo 4.

Solución

1) Se comprueba fácilmente que G es un grupo formando la tabla:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Como $C \subset G^*$ y además es grupo $\Rightarrow$ G es subgrupo de C^*.

2) Las dos posibilidades que existen son:

$f: G \longrightarrow z/4$	$g: G \longrightarrow z/4$
$1 \longrightarrow \bar{0}$	$1 \longrightarrow \bar{0}$
$-1 \longrightarrow \bar{2}$	$-1 \longrightarrow \bar{2}$
$i \longrightarrow \bar{1}$	$i \longrightarrow \bar{3}$
$-i \longrightarrow \bar{3}$	$-i \longrightarrow \bar{1}$

La comprobación es inmediata, ya que se verifica

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$
$$g(xy)=g(x)+g(y)$$

además, al ser f y g aplicaciones biyectivas, se trata de dos isomorfismos.

43. *Se define en R la operación $*$ dada así:*

$$\forall x,\ y \in R \qquad x * y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

y una aplicación de R en R tal que $f(x)=x^3$. Demostrar que f es un isomorfismo de $(R, *)$ en $(R, +)$.

Solución

$$f(x * y)=f(x)+f(y)$$
$$f(x * y)=(\sqrt[3]{x^3+y^3})^3=x^3+y^3=f(x)+f(y)$$

Al ser f biyectiva, se trata de un isomorfismo.

44. *En $Z \times Z$ definimos las siguientes operaciones:*

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$
$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac,\ ad+bc)$$

Se pide:

1) Demostrar que $(Z \times Z,\ +,\ \cdot)$ tiene estructura de anillo.

2) Estudiar la aplicación f definida en $Z \times Z \rightarrow Z$ dada por $f(a,\ b)=a$. ¿Es un homomorfismo?

3) Estudiar en $(Z \times Z,\ +,\ \cdot)$ los divisores de cero.

Solución

1) Para ver que $(Z \times Z,\ +,\ \cdot)$ es anillo.

Respecto de la 1.ª operación $(Z \times Z,\ +)$ es grupo según se vió en casos anteriores.

Respecto de la 2.ª operación cumple:

— *Operación interna:* $(a, b) \cdot (c, d) \in Z \times Z$.

— *Propiedad asociativa:*

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] \text{ en efecto}$$

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac, ad + bc)(e, f) = (ace, acf + ade + bce)$$

$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce, cf + de) = (ace, acf + ade + bce)$$

— *Elemento unitario:* $(a, b) \cdot (i, j) = (a, b)$

$$(a, b) \cdot (i, j) = (ai, bi + aj) = (a, b) \Rightarrow i = 1, j = 0$$

El elemento unitario es $(1, 0)$.

Por tanto $(Z \times Z, \cdot)$ es semigrupo unitario.

— *Propiedad conmutativa:*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

— *Propiedad distributiva:*

$$(a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$$

En efecto:

$$(a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c + e, d + f) = (ac + ae, ad + af + bc + be)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) = (ac, ad + bc) + (ae, af + be) = = (ac + ae, ad + bc + af + be)$$

Por tanto $(Z \times Z, +, \cdot)$ es anillo unitario.

2) Establecida la aplicación f:

$$f: Z \times Z \longrightarrow Z$$
$$(a, b) \longrightarrow a$$

Se ha de cumplir:

$$f[(a, b) + (c, d)] = f(a, b) + f(c, d)$$
$$f[(a, b) \cdot (c, d)] = f(a, b) \cdot f(c, d)$$

$$\left.\begin{array}{l} f[(a,\ b)+(c,\ d)]=f(a+c,\ b+d)=a+c \\ f(a,\ b)+f(c,\ d)=a+c \end{array}\right\} \text{ se cumple}$$

$$\left.\begin{array}{l} f[(a,\ b)\cdot(c,\ d)]=f(ac,\ ad+bc)=ac \\ f(a,\ b)\cdot f(c,\ d)=ac \end{array}\right\} \text{ se cumple}$$

Como $(Z,\ +,\ \cdot)$ es anillo f es un homomorfismo entre anillos.

3) Los divisores de cero son todos aquellos pares distintos de (0, 0) tales que al aplicarles la segunda operación dan (0, 0)

$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(0,\ 0) \Rightarrow (ac,\ ad+bc)=(0,\ 0) \Rightarrow \begin{cases} ac=0 \\ ad+bc=0 \end{cases}$$

$$\text{Si } a=0 \begin{cases} bc=0 \Rightarrow b=0 \text{ ó } c=0 \Rightarrow b=0 \text{ se elimina ya} \\ \text{que } (a,\ b)=(0,\ 0) \text{ no puede ser, por lo tanto} \end{cases}$$

Si $a=0$ entonces $c=0$.

$$\text{Si } c=0 \begin{cases} ad=0 \Rightarrow a=0 \text{ ó } d=0 \Rightarrow d=0 \text{ se elimina ya} \\ \text{que } (c,\ d)=(0,\ 0) \text{ no puede ser, por lo tanto} \end{cases}$$

Si $c=0$ entonces $a=0$.

Los divisores de cero son pares de la forma (0, b).

45. *En $Z \times Z$ definimos las siguientes operaciones:*

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$
$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac,\ 0)$$

Se pide:

1) Demostrar que $(Z \times Z,\ +,\ \cdot)$ es un anillo.

2) Aplicamos este anillo sobre Z mediante la aplicación $f(a,\ b)=a$. Demostrar que se trata de un homorfismo de anillos.

3) Estudiar los divisores de cero en $(Z \times Z,\ +,\ \cdot)$.

Solución

1) $(Z \times Z,\ +)$ es grupo abeliano, siendo (0, 0) el elemento neutro y el simétrico de (a, b) es (−a, −b).

$(Z \times Z, \cdot)$ es semigrupo conmutativo.

La segunda operación es distributiva respecto a la primera.

Por tanto $(Z \times Z, +, \cdot)$ es anillo unitario.

2) Se cumple:

$$f[(a, b)+(c, d)]=f(a, b)+f(c, d)=a+c$$
$$f[(a, b)\cdot(c, d)]=f(a, b)\cdot f(c, d)=ac$$

3) Los divisores de cero son todos aquellos pares de primera componente nula ya que:

$$(0, b)\cdot(0, d)=(0, 0) \text{ siendo } (0, b) \text{ y } (0, d)\neq(0, 0)$$
$$(a, b)\cdot(0, d)=(0, 0) \text{ siendo } (a, b) \text{ y } (0, d)\neq(0, 0)$$

46. *En $Z \times Z$ definimos las siguientes operaciones:*

$$(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b')$$
$$(a, b)\cdot(a', b')=(aa', bb')$$

Se pide:

1) Demostrar que $(Z \times Z, +, \cdot)$ es anillo.

2) Consideremos la aplicación $f: Z \times Z \longrightarrow Z$ definida así $f(a, b)=a$. Demostrar que f es un homomorfismo entre anillos.

3) Calcular el núcleo de f.

Solución

1) El neutro de la suma es (0, 0), el simétrico de (a, b) es (−a, −b). El elemento unidad es (1, 1).

Existen divisores de cero ya que siendo (a, 0) y (0, b) distintos de (0, 0) se cumple que:

$$(a, 0)\cdot(0, b)=(0, 0)$$

2) Es homomorfismo pues:

$$f[(a, b)+(a', b')]=f(a, b)+f(a', b')=a+a'$$
$$f[(a, b) \cdot (a', b')]=f(a, b) \cdot f(a', b')= aa'$$

3) El núcleo es:

$$\text{Ker } f=\{(a, b) \in Z \times Z \mid f(a, b)=0\}$$

Como $f(a, b)=a \Rightarrow f(0, b)=0$ luego

$$\text{Ker } f=\{(0, b) \mid b \in Z\}$$

47. *Sobre el conjunto $Z \times Z$ de pares ordenados*

$$x=(a, b)\ ,\quad y=(c, d)$$

se definen las siguientes leyes

$$x+y=(a+c,\ b+d)$$
$$x \cdot y=(ac-bd,\ ad+bc)$$

Se pide:

1) Demostrar que se obtiene de este modo un anillo.

2) ¿Cuáles son el elemento neutro y el elemento unidad?

3) ¿Se trata de un anillo de integridad?

Solución

1) Es anillo.

2) El elemento neutro es (0, 0) y el unidad (1, 0).

3) No hay divisores de cero pues

$$(a, b) \cdot (c, d)=(0, 0) \Rightarrow (a, b)=(0, 0) \text{ ó } (c, d)=(0, 0)$$

48. *Si $f: A_1 \longrightarrow A_2$ es un homomorfismo de anillos, demostrar que:*

1) $Ker f=\{x \in A_1 \mid f(x)=0\}$ es un ideal de A_1.

2) $Imf = \{y \in A_2 \mid \exists x \in A_1 \text{ con } f(x) = y\}$ es un subanillo de A_2, siendo $(A_1, +, \cdot)$ y $(A_2, +, \cdot)$ anillos.

Solución

1) Kerf es un ideal de A_1 pues:

— Si x, $y \in \text{Ker}\, f \Rightarrow f(x) = 0,\ f(y) = 0$

$$f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{Ker}\, f$$

— Si $x \in \text{Ker}\, f \Rightarrow f(x) = 0$ entonces $\forall a \in A_1$ se cumple

$$f(ax) = f(a) f(x) = f(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ax \in \text{Ker}\, f$$

Luego Kerf es un ideal de A_1.

2) Imf es un subanillo de A_2, puesto que:

— Si $y_1, y_2 \in \text{Im}\, f \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in A_1 \mid f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$

$$y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \Rightarrow y_1 - y_2 \in \text{Im}\, f$$

— Si $y_1, y_2 \in \text{Im}\, f \Rightarrow y_1 y_2 = f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 x_2) = y_1 y_2 \in \text{Im}\, f$

Luego Imf es un subanillo de A_2.

49. *Se considera el anillo $A = (Z/15, +, \cdot)$ y los subconjuntos A_1 y A_2 dados por:*

$$A_1 = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$$
$$A_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$$

Demostrar:

1) Que $(A_1, +, \cdot)$ es subanillo de A sin divisores de 0.

2) Que $(A_2, +, \cdot)$ es subanillo de A sin divisores de 0.

3) ¿Son $(A_1, +, \cdot)$ y $(A_2, +, \cdot)$ cuerpos?

4) Probar que A_1 es isomorfo a Z/3.

5) Probar que A_2 es isomorfo a Z/5.

Solución

1) Las tablas de sumar y de multiplicar en A_1 son:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$

De las tablas se desprende:

— Respecto a la suma $(A_1\ +)$ es grupo abeliano.

— Respecto al producto $(A_1\ \cdot)$ es semigrupo con elemento neutro $(\overline{10})$ y conmutativo.

— Es distributivo el producto respecto de la suma:

$$\bar{5}\cdot(\bar{5}+\overline{10})=(\bar{5}\cdot\bar{5})+(\bar{5}\cdot\overline{10})$$
$$\bar{5}\cdot\bar{0} \quad = \quad \overline{10}+\bar{5}$$
$$\bar{0} \quad = \quad \bar{0}$$

No tiene divisores de $\bar{0}$ ya que $\bar{a}\cdot\bar{b}\neq\bar{0}$ siendo $\bar{a}$ y $\bar{b}\neq\bar{0}$.

2) Las tablas de sumar y de multiplicar en A_2 son:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$

De las tablas se desprende:

— Respecto a la suma $(A_2, +)$ es grupo abeliano.

— Respecto al producto $(A_2, \cdot)$ es semigrupo con elemento neutro $(\bar{6})$ y conmutativo.

— Es distributiva la segunda respecto de la primera

$$\begin{aligned} \bar{3} \cdot (\bar{6}+\overline{12}) &= (\bar{3} \cdot \bar{6})+(\bar{3} \cdot \overline{12}) \\ \bar{3} \cdot \bar{3} &= \bar{3}+\bar{6} \\ \bar{9} &= \bar{9} \end{aligned}$$

3) $(A_1, +, \cdot)$ es cuerpo ya que todo elemento de A_1 tiene inverso respecto al producto. El inverso de $\bar{5}$ es $\bar{5}$ y el de $\overline{10}$ es $\overline{10}$.

$(A_2, +, \cdot)$ es cuerpo ya que todo elemento de A_2 tiene inverso respecto al producto. El inverso de $\bar{3}$ es $\overline{12}$, el de $\bar{6}$ es $\bar{6}$, el de $\bar{9}$ es $\bar{9}$ y el de $\overline{12}$ es $\bar{3}$.

4) Estableciendo la aplicación biyectiva f entre A_1 y $Z/3$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f: A_1 &\longrightarrow Z/3 \\ \bar{0} &\longrightarrow \bar{0} \\ \overline{10} &\longrightarrow \bar{1} \\ \bar{5} &\longrightarrow \bar{2} \end{aligned}$$

cumpliéndose:

$$\left.\begin{aligned} f(a+b) &= f(a)+f(b) \\ f(a \cdot b) &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}\right\} \text{Se trata de un isomorfismo entre anillos}$$

5) Estableciendo la aplicación biyectiva f entre A_2 y $Z/5$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
f: A_2 &\longrightarrow Z/5 \\
\overline{0} &\longrightarrow \overline{0} \\
\overline{3} &\longrightarrow \overline{3} \\
\overline{6} &\longrightarrow \overline{1} \\
\overline{9} &\longrightarrow \overline{4} \\
\overline{12} &\longrightarrow \overline{2}
\end{aligned}
$$

cumpliéndose:

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(a \cdot b)=f(a) \cdot f(b)$$

Se trata de un isomorfismo entre anillos.

2. Espacios vectoriales

CONCEPTOS TEORICOS

— **Espacio vectorial:** $[V(K), *, \cdot]$ es espacio vectorial si:

1) $(V, *)$ es grupo abeliano
2) El dominio de operadores K es un cuerpo conmutativo.
3) Respecto de la operación externa. Se cumple:

   — $\forall \alpha \in K$ y $\forall x \in V \Rightarrow \alpha x \in V$

   — $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall x \in V \Rightarrow \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

   — $\forall \alpha \in K$ y $\forall x, y \in V \Rightarrow \alpha(x * y) = \alpha x * \alpha y$

   — $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall x \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha x * \beta x$

   — $\forall x \in V$ y $1 \in K \Rightarrow 1 \cdot x = x$

— **Módulo:** $[M(A), *, \cdot]$ es módulo si verifica todas las propiedades de espacio vectorial pero el dominio de operadores es un anillo unitario conmutativo en lugar de cuerpo.

— **Subespacio vectorial:** Sea $[V(K), *, \cdot]$ espacio vectorial y V' un subconjunto de V, tal que $[V'(K), *, \cdot]$ es espacio vectorial, entonces V' es un subespacio vectorial de V.

— **Sistema libre:** Un conjunto de vectores $x_1, x_2, ..., x_n$ no nulos de un espacio vectorial V(K) son linealmente independientes o constituyen un sistema libre de vectores de orden n si:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \quad (\alpha_i \in k)$$

o bien

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \neq \bar{0}$$

— **Sistema ligado:** Un conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no todos nulos de un espacio vectorial V(K) son linealmente dependientes o constituyen un sistema ligado de vectores si:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \bar{0} \qquad (\alpha_i \in K)$$

— **Orden de un sistema libre:** Es el número de vectores que constituye el sistema libre.

— **Sistema libre de orden máximo:** Cuando no puede haber un sistema libre de orden superior a él y todo vector del espacio vectorial se puede expresar como combinación lineal de estos vectores.

— **Base de un espacio vectorial:** Es cualquier sistema libre de orden máximo.

— **Dimensión de un espacio vectorial:** Es el número de vectores de un sistema libre de orden máximo.

PROBLEMAS

1. *En el conjunto R^+ de los reales positivos se definen las operaciones:*

$$x * y = x \cdot y \qquad \forall x,\ y \in R^+$$

$$a \circ x = x^a \qquad \forall x \in R^+ \ y \ \forall a \in R$$

Demostrar que $(R^+(R), *, \circ)$ es un espacio vectorial.

Solución

1) Comprobamos primeramente que $(R^+, *)$ es grupo:

— *Operación interna:* $\forall x,\ y \in R^+ \Rightarrow x * y \in R^+$

— *Propiedad asociativa:* $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = (x * y) \cdot z = (x \cdot y)z = x(yz) = z(y * z) = z * (y * z)$$

— *Elemento neutro:* $x * e = x$

$$x * e = x \cdot e = x \Rightarrow e = 1$$

— *Elemento simétrico:* $x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = x \cdot x' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $(R^+, *)$ es grupo abeliano por cumplir la propiedad conmutativa.

— *Propiedad conmutativa:* $x * y = y * x$

$$x * y = xy = yx = y * x$$

2) Probamos ahora que la operación $\circ$ cumple las propiedades de la operación externa.

— *Operación externa:* $\forall x \in R^+$ y $\forall a \in R \Rightarrow a \circ x \in R^+$

— *Segunda propiedad:* $\forall a, b \in R$ y $\forall x \in R^+$

$$a \circ (b \circ x) = (ab) \circ x$$

$$a \circ (b \circ x) = a \circ (x^b) = (x^b)^a = x^{ab} = (ab) \circ x$$

— *Tercera propiedad:* $\forall a, b \in R$ y $\forall x \in R^+$

$$(a+b) \circ x = (a \circ x) * (b \circ x)$$

$$(a+b) \circ x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = x^a * x^b = (a \circ x) * (b \circ x)$$

— *Cuarta propiedad:* $\forall a \in R$ y $\forall x, y \in R^+$

$$a \circ (x * y) = (a \circ x) * (a \circ y)$$

$$a \circ (x * y) = a \circ (x \cdot y) = (xy)^a = x^a \cdot y^a = x^a * y^a = (a \circ x) * (a \circ y)$$

— *Quinta propiedad:* $\forall x \in R^+ \Rightarrow 1 \circ x = x$

$$1 \circ x = x^1 = x$$

Llegamos a la conclusión de que $(R^+(R), *, \circ)$ es espacio vectorial.

2. *Estudiar si los conjuntos siguientes forman o no espacio vectorial sobre el empleo de los números racionales.*

1. Conjunto de números reales de la forma: $a+b\sqrt{5}$, a, $b \in Z$ *con las operaciones:*

— *Interna:* $(a+b\sqrt{5})+(a'+b'\sqrt{5})=(a+a')+(b+b')\sqrt{5}$

— *Externa:* $\alpha(a+b\sqrt{5})=(\alpha a)+(\alpha b)\sqrt{5}$; $\alpha \in Q$

2. Conjunto de números reales de la forma: $a+b\sqrt{5}$, a, $b \in Q$ *con las operaciones:*

— *Interna:* $(a+b\sqrt{5})+(a'+b'\sqrt{5})=(a+a')+(b+b')\sqrt{5}$

— *Externa:* $\alpha(a+b\sqrt{5})=(\alpha a)+(\alpha b)\sqrt{5}$; $\alpha \in Q$

Solución

1) El subconjunto A de los números reales de la forma: $a+b\sqrt{5}$ con a, $b \in Z$ respecto de la operación interna tiene estructura de grupo abeliano y las propiedades son fácilmente deducibles.

— Respecto de la operación externa, la correspondencia:

$$Q \times A \longrightarrow A$$

no es aplicación pues $\forall \alpha \in Q$ y $\forall a+b\sqrt{5} \in A$

$$\alpha(a+b\sqrt{5})=\alpha a+\alpha b\sqrt{5} \notin A$$

ya que (αa) y (αb) no serán siempre números enteros.

Por tanto el conjunto A no tiene estructura de espacio vectorial respecto de las operaciones consideradas.

2) El subconjunto B de los números reales de la forma: $a+b\sqrt{5}$ con a, $b \in Q$ es grupo aditivo abeliano

— Respecto de la operación externa, la correspondencia

$$Q \times B \longrightarrow B$$

es una aplicación, pues:

$$\forall \alpha \in Q \text{ y } \forall (a+b\sqrt{5}) \in B \Rightarrow \alpha(a+b\sqrt{5}) \in B$$

cumpliéndose la primera propiedad de la operación externa:

— *La segunda propiedad* es

$$\forall (a+b\sqrt{5}),\ (a'+b'\sqrt{5}) \in B \text{ y } \forall \alpha \in Q$$

$$\alpha[(a+b\sqrt{5})+(a'+b'\sqrt{5})]=\alpha(a+b\sqrt{5})+\alpha(a'+b'\sqrt{5})$$

— *La tercera propiedad* es

$$\forall \alpha,\ \beta \in Q \text{ y } \forall (a+b\sqrt{5}) \in B$$

$$(\alpha+\beta)(a+b\sqrt{5})=\alpha(a+b\sqrt{5})+\beta(a+b\sqrt{5})$$

— *La cuarta propiedad* es

$$\forall \alpha,\ \beta \in Q \text{ y } \forall (a+b\sqrt{5}) \in B$$

$$\alpha[\beta(a+b\sqrt{5})]=(\alpha\beta)(a+b\sqrt{5})$$

— *La quinta propiedad* es

$$1 \in Q \text{ y } \forall (a+b\sqrt{5}) \in B$$

$$1(a+b\sqrt{5})=a+b\sqrt{5}$$

El conjunto B(Q) tiene estructura de espacio vectorial respecto a las operaciones definidas.

3. *En el conjunto $R \times R$ se definen las operaciones:*

1) $x+y=(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)\ \forall x,\ y \in R \times R$

2) $ax=a(x_1,\ x_2)=(ax_1,\ ax_2)\ \forall a \in R\ y\ \forall x \in R \times R$

Estudiar si $[R \times R(R),\ +,\ \cdot\ )$ es espacio vectorial.

Solución

— Se cumple que $(R \times R,\ +)$ es grupo siendo el neutro $0=(0,\ 0)$

y el simétrico de $x=(x_1, x_2)$ es $x'=(-x_1, -x_2)$.

— Respecto a la segunda operación cumple las cinco propiedades.

Se trata de un espacio vectorial.

4. *Sea $R^2=\{(x, y)|x, y \in R\}$ y C el cuerpo de los números complejos; se definen las operaciones:*

— *Interna: $(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$.*

— *Externa: $\alpha(x, y)=(ax-by, bx+ay)$ siendo $\alpha=a+bi \in C$.*

Demostrar que $[R^2(C), +, \cdot]$ es un espacio vectorial.

Solución

1) El conjunto R^2 respecto de la operación interna es grupo abeliano, siendo el elemento neutro el par (0, 0) y el simétrico de (x, y) es el par $(-x, -y)$.

2) Respecto de la segunda operación:

— Es *operación externa*, por definición.

— *Segunda propiedad:* $\forall \alpha \in C$, y $\forall (x, y), (x', y') \in R^2$

$$\alpha[(x, y)+(x', y')]=\alpha(x, y)+\alpha(x', y')$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\alpha[(x, y)+(x', y')]&=\alpha(x+x', y+y')=[a(x+x')-b(y+y'), b(x+x')+\\&\quad a(y+y')]=\\&=(ax+ax'-by-by', bx+bx'+ay+ay')=\\&=(ax-by+ax'-by', bx+ay+bx'+ay')=\\&=(ax-by, bx+ay)+(ax'-by', bx'+ay')=\\&=\alpha(x, y)+\alpha(x', y')\end{aligned}$$

— *Tercera propiedad:* $\forall \alpha, \beta \in C$ y $\forall (x, y) \in R^2$

$$(\alpha+\beta)(x, y)=\alpha(x, y)+\beta(x, y)$$

En efecto:

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

$$(\alpha+\beta)(x, y)=[(a+a')+(b+b')i](x, y)=[(a+a')x-(b+b')y, (b+b')x+$$
$$+(a+a')y]=(ax+a'x-by-b'y, bx+b'x+ay+a'y)=$$
$$=(ax-by+a'x-b'y, bx+ay+b'x+a'y)=$$
$$=(ax-by, bx+ay)+(a'x-b'y, b'x+a'y)=\alpha(x, y)+\beta(x, y)$$

— *Cuarta propiedad:* $\forall\alpha,\ \beta\in C$ y $\forall(x, y)\in \mathbf{R}^2$

$$\alpha[\beta(x, y)]=\alpha\beta(x, y)$$

En efecto,

$$\alpha[\beta(x, y)]=(a+bi)\ [(a'+b'i)\ (x, y)]=(a+bi)[a'x-b'y, b'x+a'y]=$$
$$=[a(a'x-b'y)-b(b'x+a'y), b(a'x-b'y)+a(b'x+a'y)]=$$
$$=(aa'x-ab'y-bb'x-ba'y, ba'x-bb'y+ab'x+aa'y)=$$
$$=[(aa'-bb')x-(ab'+ba')y, (b'a+ba')x+(aa'-bb')y]=$$
$$=[(aa'-bb')+(ab'+ba')i](x, y)=[(a+bi)(a'+b'i)](x, y)=$$
$$=(\alpha\beta)(x, y)$$

— *Quinta propiedad:* $\forall(x, y)\in \mathbf{R}^2$ y $1\in C \Rightarrow 1\cdot(x, y)=(x, y)$

Como $1=(1+0i)$, resulta:

$$1\cdot(x, y)=(1+0i)(x, y)=(1\cdot x-0\cdot y,\ 0\cdot x+1\cdot y)=(x, y)$$

Por todo lo anterior, $[\mathbf{R}^2(C), +, \cdot]$ es un espacio vectorial.

5. *En el conjunto R^2 se define la ley de composición interna*

$$(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$$

y la ley de composición externa

$$a(x_1, x_2)=(ax_1, 0) \qquad \text{con } a\in R$$

Estudiar si $[R^2(R), +, \cdot]$ es espacio vectorial.

Solución

— Respecto a la primera operación $(R^2, +)$ es grupo abeliano, siendo el elemento neutro el $(0, 0)$ y el simétrico de (x_1, x_2) es $(-x_1, -x_2)$.

— Respecto a la segunda operación no cumple la propiedad quinta, es decir:

$$1 \cdot (x_1, x_2) \neq (x_1, x_2)$$

Por tanto, no es $[R^2(R), +, \cdot]$ espacio vectorial.

6. *Demostrar que* $[R^3(R), +, \cdot]$ *es espacio vectorial, siendo:*

— *Operación interna:* $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in R^3$

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

— *Operación externa:* $\forall (x, y, z) \in R^3$ *y* $\forall a \in R$

$$a(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

Solución

1) $(R^3, +)$ es grupo abeliano, siendo el elemento neutro $(0, 0, 0)$ y el simétrico de (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

2) Respecto a la segunda operación:

— *Es operación externa,* por definición.

— *Segunda propiedad:* $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in R^3$ y $\forall a \in R$

$$a\{(x, y, z) + (x', y', z')] = a(x, y, z) + a(x', y', z')$$

En efecto,

$$a[(x, y, z) + (x', y', z')] = a(x + x', y + y', z + z') =$$

$$= [a(x + x'), a(y + y'), a(z + z')] = [ax + ax', ay + ay', az + az'] =$$

$$= (ax, ay, az) + (ax', ay', az') = a(x, y, z) + a(x', y', z')$$

— *Tercera propiedad:* $\forall (x, y, z) \in R^3$ y $a, b \in R$

$$(a+b)(x, y, z)=a(x, y, z)+b(x, y, z)$$

En efecto,

$$(a+b)(x, y, z)=[(a+b)x, (a+b)y, (a+b)z]=(ax+bx, ay+by, az+bz)$$
$$=(ax, ay, az)+(bx, by, bz)=a(x, y, z)+b(x, y, z)$$

— *Cuarta propiedad:* $\forall (x, y, z) \in R^3$ y $a, b \in R$

$$a[b(x, y, z)=(ab)(x, y, z)$$

En efecto,

$$a[b(x, y, z)]=a(bx, by, bz)=(abx, aby, abz)=(ab)(x, y, z)$$

— *Quinta propiedad:* $\forall (x, y, z) \in R^3$

$$1 \cdot (x, y, z)=(x, y, z)$$

En efecto,

$$1 \cdot (x, y, z)=(1 \cdot x, 1 \cdot y, 1 \cdot z)=(x, y, z)$$

Por tanto, el conjunto R^3 respecto del cuerpo R y con las operaciones definidas tiene estructura de espacio vectorial.

7. *Dado el conjunto* $V=\{(x, y) | x, y \in R$, *siendo* $x \leqslant y\}$ *con las operaciones*

$$1)\quad (x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$$
$$2)\quad a(x, y)=(|a|x, |a|y)$$

Ver si $[V(R), +, \cdot]$ *es espacio vectorial.*

Solución

Respecto a la primera operación, el elemento neutro es (0, 0), no existe elemento inverso, pues el inverso de (x, y) sería $(-x, -y)$, pero la condición $x \leqslant y$ no implica que $-x \leqslant -y$, ya que

$$x \leqslant y \Rightarrow -x \geqslant -y$$

No es $[V(R), +, \cdot]$ espacio vectorial.

8. *Siendo P el conjunto de polinomios (con coeficientes en R) de grado menor o igual a 1 con las operaciones:*

$$f = a_0 + a_1 x$$

$$g = b_0 + b_1 x$$

1) $f+g=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x \quad \forall f,\ g \in P$

2) $\alpha \cdot f=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)x \quad \forall f \in P$ *y* $\alpha \in R$

Ver si $[P(R),\ +,\ \cdot\ ]$ es espacio vectorial.

Solución

1) Respecto a la primera operación:

— *Operación interna:* $\forall$f, g $\in$ P

$$f+g=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x \in P$$

— *Propiedad asociativa:* $\forall$f, g, h $\in$ P

$$(f+g)+h=f+(g+h)$$

$$[(a_0+b_0)+c_0]+[(a_1+b_1)+c_1]x=[a_0+(b_0+c_0)]+[a_1+(b_1+c_1)]x$$

— *Elemento neutro:* $\forall f \in P \quad 0+f=0$

$$\text{siendo } 0=0+0 \cdot x$$

— *Elemento simétrico:* El simétrico de $f=a_0+a_1x$ es $f'=-a_0-a_1x$

— *Propiedad conmutativa:* $\forall$f, g $\in$ P

$$f+g=g+f$$

El conjunto P con la operación de sumar es grupo abeliano.

2) Respecto a la segunda operación:

— *Es operación externa:*

$$R \times P \longrightarrow P$$

$$(\alpha,\ f) \longrightarrow \alpha \cdot f$$

— *Segunda propiedad:* $\forall$f, g $\in$ P y $\forall \alpha \in$ R

$$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$$

En efecto:

$\alpha(f+g)=\alpha[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x]=\alpha(a_0+b_0)+\alpha(a_1+b_1)x=$

$=\alpha a_0+\alpha b_0+(\alpha a_1+\alpha b_1)x=(\alpha a_0+\alpha a_1 x)+(\alpha b_0+\alpha b_1 x)=$

$=\alpha(a_0+a_1 x)+\alpha(b_0+b_1 x)=\alpha f+\alpha g$

— *Tercera propiedad:* $\forall f \in P$ y $\forall \alpha,\ \beta \in R$

$$(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$$

En efecto:

$(\alpha+\beta)f=(\alpha+\beta)(a_0+a_1 x)=(\alpha+\beta)a_0+(\alpha+\beta)a_1 x=$

$=\alpha a_0+\beta a_0+\alpha a_1 x+\beta a_1 x=(\alpha a_0+\alpha a_1 x)+$

$+(\beta a_0+\beta a_1 x)=\alpha(a_0+a_1 x)+\beta(a_0+a_1 x)=\alpha f+\beta f$

— *Cuarta propiedad:* $\forall f \in P$ y $\forall \alpha,\ \beta \in R$

$$\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$$

En efecto:

$\alpha(\beta f)=\alpha[\beta(a_0+a_1 x)]=\alpha[\beta a_0+\beta a_1 x]=\alpha(\beta a_0)+\alpha(\beta a_1)x=$

$=(\alpha\beta)a_0+(\alpha\beta)a_1 x=(\alpha\beta)(a_0+a_1 x)=(\alpha\beta)f$

— *Quinta propiedad:* $1 \in R$ y $\forall f \in P$

$$1 \cdot f=f$$

En efecto:

$$1 \cdot f=1 \cdot (a_0+a_1 x)=(a_0+a_1 x)=f$$

Se cumple que $[P(R),\ +,\ \cdot\ )$ es un espacio vectorial.

9. *En el conjunto $R \times R$ se definen las operaciones:*

   1) $(x,\ y)+(x',\ y')=(x+x',\ y+y')$

   2) $\alpha(x,\ y)=(\alpha^2 x,\ \alpha^2 y)$

   $\forall \alpha \in R$ *y* $\forall (x,\ y),\ (x',\ y') \in R \times R$

¿Es $[R \times R(R), +, \cdot]$ espacio vectorial?

Solución

No es espacio vectorial pues en general:

$$(\alpha+\beta)(x, y) \neq \alpha(x, y)+\beta(x, y)$$

10. *Sea $[R^3(R), +, \cdot]$ espacio vectorial. Estudiar si son o no subespacios vectoriales los siguientes subconjuntos de R^3:*

1) $U=\{(x_1, x_2, 0) | x_1 \cdot x_2 \in R\}$

2) $U=\{(x_1, x_2, x_3) | x_1+x_2+x_3=0\}$

3) $U=\{(x_1, 0, 0) | x_1 \in R\}$

4) $U=\{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \in Q\}$

5) $U=\{(x_1, x_2, x_3) | x_1=x_2+x_3\}$

6) $U=\{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqslant 1\}$

Solución

Para que sea subespacio vectorial tiene que ocurrir:

a) $\forall x, y \in U \Rightarrow x+y \in U$

b) $\forall x \in U$ y $\forall a \in R \Rightarrow ax \in U$

En cada caso tendremos:

1)

$$x+y=(x_1, x_2, 0)+(y_1, y_2, 0)=(x_1+y_1, x_2+y_2, 0) \in U$$

$$ax=a(x_1, x_2, 0)=(ax_1, ax_2, 0) \in U$$

Sí es subespacio vectorial

2)

$$x+y=(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3)=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in U$$

ya que $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)$
$=0+0=0$

$$ax=a(x_1,\ x_2,\ x_3)=(ax_1,\ ax_2,\ ax_3)\in U$$

pues si $x_1+x_2+x_3=0$ también $ax_1+ax_2+ax_3=a(x_1+x_2+x_3)=a\cdot 0=0$

Es subespacio vectorial

3)

$$x+y=(x_1,\ 0,\ 0)+(y_1,\ 0,\ 0)=(x_1+y_1,\ 0,\ 0)\in U$$

$$ax=a(x_1,\ 0,\ 0)=(ax_1,\ 0,\ 0)\in U$$

Sí es subespacio vectorial

4)

$$x+y=(x_1,\ x_2,\ x_3)+(y_1,\ y_2,\ y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\in U$$

$$ax=a(x_1,\ x_2,\ x_3)=(ax_1,\ ax_2,\ ax_3)\notin U$$

ya que $a\in R$ y $x_1,\ x_2,\ x_3\in Q$ y $ax_1,\ ax_2,\ ax_3$ no tienen por qué ser números racionales.

No es subespacio vectorial

5)

$$x+y=(x_1,\ x_2,\ x_3)+(y_1,\ y_2,\ y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\in U$$

pues $x_1+y_1=(x_2+y_2)+(x_3+y_3)$ siendo $\begin{cases} x_1=x_2+x_3 \\ y_1=y_2+y_3 \end{cases}$

$$ax=a(x_1,\ x_2,\ x_3)=(ax_1,\ ax_2,\ ax_3)\in U$$

ya que si $x_1=x_2+x_3 \Rightarrow ax_1=ax_2+ax_3$

Sí es subespacio vectorial

6)

$$x+y=(x_1,\ x_2,\ x_3)+(y_1,\ y_2,\ y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\in U$$

pues si $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 1$ e $y_1^2+y_2^2+y_3^2\geqslant 1$ también

$$(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2\geq 1$$

$ax=a(x_1,\ x_2,\ x_3)=(ax_1,\ ax_2,\ ax_3)\in U$ pues si

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 1 \Rightarrow ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2\geqslant 1$$

No es subespacio vectorial pues tomados dos ternas (1, 1, 1) y (−1, −1, −1) su suma

$$(1, 1, 1)+(-1, -1, -1)=(0, 0, 0) \notin U$$

11. *En el espacio vectorial* $[R^4(R), +, \cdot]$ *averiguar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de* R^4.

1) $U=\{(3x_2, x_2, x_4+x_2, x_4)|x_2, x_4 \in R\}$

2) $U=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 \cdot x_2=0\}$

3) $U=\{(x_1, x_2, x_1, x_2)|x_1, x_2 \in Z\}$

4) $U=\{(x_1, x_1, x_1, x_1)|x_1 \in R\}$

5) $U=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)|2x_1+4x_2=0\}$

6) $U=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1+2x_4=7\}$

Solución

Para ser subespacio vectorial tiene que ocurrir que

a) $\forall x, y \in U \Rightarrow x+y \in U$

b) $\forall x \in U$ y $\forall a \in R \Rightarrow ax \in U$

Veamos en cada caso:

1)

$$x+y=(3x_2, x_2, x_4+x_2, x_4)+(3y_2, y_2, y_4+y_2, y_4)=$$
$$=(3x_2+3y_2, x_2+y_2, x_4+x_2+y_4+y_2, x_4+y_4)=$$
$$=[3(x_2+y_2), x_2+y_2, (x_4+y_4)+(x_2+y_2), x_4+y_4) \in U$$
$$a\,x=a(3x_2, x_2, x_4+x_2, x_4)=(3ax_2, ax_2, ax_4+ax_2, ax_4) \in U$$

por lo tanto se trata de un subespacio vectorial.

2) Consideremos los vectores siguientes:

$$x=(0, x_2, x_3, x_4) \text{ cumpliéndose } x_1 x_2=0$$
$$y=(y_1, 0, y_3, y_4) \text{ cumpliéndose } y_1, y_2=0$$
$$x+y=(0, x_2, x_3, x_4)+(y_1, 0, y_3, y_4)=(y_1, x_2, x_3+y_3, x_4+y_4) \notin U$$

que no cumple la condición pues $y_1 \cdot x_2 \neq 0$.

Por tanto no se trata de un subespacio vectorial.

3) Para la primera operación:

$x+y=(x_1, x_2, x_1, x_2)+(y_1, y_2, y_1, y_2)=$

$=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_1+y_1, x_2+y_2) \in U$

Para la segunda operación:

$$ax=a(x_1, x_2, x_1, x_2)=(ax_1, ax_2, ax_1, ax_2) \notin U$$

ya que al ser $a \in R$ y $x_1, x_2 \in Z \Rightarrow ax_1$ y ax_2 no tiene por que ser con elemento de Z.

4) En este caso las cuatro componentes son iguales

$x+y=(x_1, x_1, x_1, x_1)+(y_1, y_1, y_1, y_1)=$

$=(x_1+y_1, x_1+y_1, x_1+y_1, x_1+y_1) \in U$

ya que todas las componentes son iguales

$$ax=a(x_1, x_1, x_1, x_1)=(ax_1, ax_1, ax_1, ax_1) \in U$$

Se trata de un subespacio vectorial.

5) Considerando como antes

$$x=(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{con} \quad 2x_1+4x_4=0$$

$$y=(y_1, y_2, y_3, y_4) \quad \text{con} \quad 2y_1+4y_4=0$$

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4) \quad \text{con} \quad 2(x_1+y_1)+4(x_4+y_4)=0$$

por lo tanto $x+y \in U$.

Para el producto

$$ax=a(x_1, x_2, x_3, x_4)=(ax_1, ax_2, ax_3, ax_4) \in U$$

ya que si $2x_1+4x_4=0$, también

$$2ax_1+4ax_4=a(2x_1+4x_4)=a \cdot 0=0$$

Se trata de un espacio vectorial.

6) Para la suma

$$x+y=(x_1, x_2, x_3, x_4)+(y_1, y_2, y_3, y_4)=$$
$$=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4) \notin U$$

pues si

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_4=7 \\ y_1+2y_4=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(x_1+y_1)+2(x_4+y_4)=(x_1+2x_4)+(y_1+2y_4)=7+7 \\ =14\end{array}$$

No se trata de subespacio vectorial.

12. *Demostrar que R^2 es la suma directa de los siguientes subespacios vectoriales:*

$$V_1=\{(x, 0)|x \in R\}$$
$$V_2=\{(0, y)|y \in R\}$$

Solución

$$V_1+V_2=\{(x, 0)+(0, y)=(x, y)|x, y \in R\}$$
$$V_1 \cap V_2=\{(0, 0)|0 \in R\}$$

ya que el único vector común a ambos es (0, 0), por lo tanto:

$$R^2=V_1 \oplus V_2$$

13. *Se considera en R^3 los subespacios siguientes:*

$$U=\{(x, y, z)\,|\,x+y+z=0\}$$
$$W=\{(t, 2t, 3t)\,|\,t \in R\}$$

Demostrar que $R^3=U \oplus W$.

Solución

1) $U \cap W=\{(0, 0, 0)\}$ pues si $v=(x, y, z) \in U \cap W$ se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \text{por pertenecer a U: } x+y+z=0 \\ \text{por pertenecer a W: } \begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \Rightarrow v=(0, 0, 0)$$

2) Si $v=(x, y, z) \in R^3$ al ser $R^3=U+W$ existen dos vectores $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v=u+w$, entonces

$$u=(a,\ b,\ c) \quad \text{con} \quad a+b+c=0$$
$$w=(t,\ 2t,\ 3t)$$

Por tanto:

$$v=u+w \Rightarrow (x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)+(t,\ 2t,\ 3t)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} x=a+t \\ y=b+2t \\ z=c+3t \\ 0=a+b+c \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z=6t \Rightarrow t=\frac{1}{6}(x+y+z)$$

por tanto:

$$a=\frac{1}{6}(5x-y-z)$$

$$b=\frac{1}{6}(-2x+4y-2z)$$

$$c=\frac{1}{6}(-3x-3y+3z)$$

Todo vector de R^3 se puede poner como suma de uno de U y otro de W.

14. *Consideremos dos subespacios cualesquiera U y W de un espacio vectorial* $[V(K),\ +,\ \cdot]$. *Demostrar que* $U \cap W$ es también un subespacio vectorial de V.

Solución

Comprobamos que el conjunto de vectores que pertenece a $U \cap W$ satisface los dos axiomas generales de subespacio vectorial

1. $\forall x,\ y \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} x \in U \text{ y } x \in W \\ y \in U \text{ e } y \in W \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \in U \\ x+y \in W \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in U \cap W$$

$$2.\quad \left.\begin{array}{l} \forall a \in K \\ \forall x \in U \cap W \end{array}\right\} \Rightarrow ax \in U \cap W$$

En efecto

$$\left.\begin{array}{l} ax \in U \\ ax \in W \end{array}\right\} \Rightarrow ax \in U \cap W$$

15. *Consideremos dos subespacios cualesquiera U y W de un espacio vectorial [V(K), +, ·]. Estudiar si $U \cup W$ es también subespacio vectorial de V.*

Solución

Comprobamos si se cumplen las dos condiciones:

1. $\forall x,\ y \in U \cup W \Rightarrow x+y \in U \cup W$

$$2.\quad \left.\begin{array}{l} \forall x \in U \cup W \\ \forall a \in K \end{array}\right\} \Rightarrow ax \in U \cup W$$

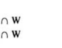
Para la primera

$$\forall x,\ y \in U \cup W \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in U \text{ ó } x \in W \text{ ó } x \in U \cap W \\ y \in U \text{ ó } y \in W \text{ ó } y \in U \cap W \end{array}\right.$$

estudiamos cada caso separadamente.

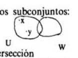
— Si los dos vectores están en uno de los dos subconjuntos:

$$\left.\begin{array}{l} x \in U \\ y \in U \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in U \in U \cup W$$



— Si uno de los vectores pertenece a la intersección

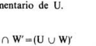
$$\left.\begin{array}{l} x \in U \\ y \in U \cap W \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in U \subset U \cup W$$



— Si x pertenece a U y al complementario de W.

— Si y pertenece a W y al complementario de U.

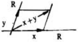
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x \in U \\ x \in W' \end{array}\right\} x+y \in W' \\ \\ \left.\begin{array}{l} y \in W \\ y \in U' \end{array}\right\} x+y \in U' \end{array}\right\} \quad x+y \in U' \cap W' = (U \cup W)'$$



No constituye subespacio vectorial.

Así considerando en $R \times R$ los vectores

$$\left.\begin{matrix} x \in R \\ y \in R \end{matrix}\right\} x+y \notin R.$$



16. *En el espacio vectorial V(R) se verifica*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad \text{siendo} \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$$

Demostrar que el subespacio vectorial o variedad lineal engendrado por los vectores x_1 y x_3 es el mismo que el engendrado por los vectores x_2 y x_3.

Solución

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ son distintos de cero.}$$

Llamamos U a la variedad engendrada por x_1 y x_3.
Llamamos W a la variedad engendrada por x_2 y x_3.

$$\forall x \in U \Rightarrow x = \beta_1 x_1 + \beta_3 x_3 = \beta_1\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}x_3\right) + \beta_3 x_3 =$$

$$= -\frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1}x_2 + \left(\beta_3 - \frac{\beta_1 \alpha_3}{\alpha_1}\right)x_3 \in W$$

luego $U \subset W$.

Del mismo modo:

$$\forall x \in W \Rightarrow x = \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = \gamma_2\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}x_3\right) + \gamma_3 x_3 =$$

$$= \frac{-\gamma_2 \alpha_1}{\alpha_2}x_1 + \left(\gamma_3 - \frac{\gamma_2 \alpha_3}{\alpha_2}\right)x_3 \in U$$

luego $W \subset U$.

De las dos inclusiones $U = W$.

17. *Sabiendo que los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ son linealmente independientes, demostrar que también lo son los vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ siendo*

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_1 + u_2$$
$$v_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$v_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

Solución

Para que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sean linealmente independientes tiene que ocurrir

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Sustituyendo

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2(u_1 + u_2) + \alpha_3(u_1 + u_2 + u_3) + \alpha_4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = \bar{0}$$

operando

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_1 + \alpha_3 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_1 + \alpha_4 u_2 + \alpha_4 u_3 + \alpha_4 u_4 = \bar{0}$$

de donde

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)u_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)u_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)u_3 + \alpha_4 u_4 = \bar{0}$$

Como $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ son linealmente independientes

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

18 Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial V linealmente independientes. Probar que los vectores $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n$ con α_i escalares distintos de cero es también un conjunto de vectores linealmente independientes.

Solución

$\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n$ son linealmente independientes si

$$\beta_1(\alpha_1 x_1) + \beta_2(\alpha_2 x_2) + \cdots + \beta_n(\alpha_n x_n) = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$$

aplicando las propiedades del espacio vectorial

$$(\beta_1\alpha_1)x_1+(\beta_2\alpha_2)x_2+\cdots+(\beta_n\alpha_n)x_n=0$$

Como $x_1, x_2, ..., x_n$ son linealmente independientes $\Rightarrow$

$$\beta_1\alpha_1=\beta_2\alpha_2=\cdots=\beta_n\alpha_n=0$$

pero como $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son distintos de cero entonces

$$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=0$$

19. *Consideremos el espacio vectorial V formado por las funciones de R en R*

$$f(x)=e^{3x} \qquad g(x)=x^3 \qquad h(x)=x$$

Demostrar que f, g, h son linealmente independientes.

Solución

Se tiene que cumplir

$$af+bg+ch=f_0 \Rightarrow a=b=c=0$$

siendo f_0 la función nula.

Luego

$$af(x)+bg(x)+ch(x)=f_0(x)=0 \text{ de donde}$$

$$ae^{3x}+bx^3+cx=0$$

Para $x=0 \Rightarrow ae^0=0 \Rightarrow a=0.$

Para $x=1 \Rightarrow ae^3+b+c=0.$

Para $x=2 \Rightarrow ae^6+8b+2c=0.$

Como $a=0 \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 8b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow b=c=0$

Las funciones dadas son linealmente independientes.

20. *Consideremos el espacio vectorial V formado por las funciones de R en R*

$$f(x)=\operatorname{sen} x \qquad g(x)=\cos x \qquad h(x)=x$$

Demostrar que f, g, h son linealmente independientes.

Solución

Se ha de cumplir:

$$af + bg + ch = f_0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

aplicando a x

$$af(x) + bg(x) + ch(x) = f_0(x) = 0 \Rightarrow a \operatorname{sen} x + b \cos x + cx = 0$$

Para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$ se obtiene un sistema cuya solución es:

$$a = b = c = 0$$

Por tanto, f, g, h son linealmente independientes.

21. *Sean x, y, z tres vectores de un espacio vectorial $V(R)$, demostrar que si x, y, z son linealmente independientes, también*

$$x + y, \qquad x - y, \qquad x - 2y + z$$

son linealmente independientes.

Solución

Para que $(x + y)$, $(x - y)$, $(x - 2y + z)$ sean linealmente independientes

$$a(x + y) + b(x - y) + c(x - 2y + z) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

Operando:

$$ax + ay + bx - by + cx - 2cy + cz = 0$$

$$(a + b + c)x + (a - b - 2c)y + cz = 0$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{r} c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Por tanto, estos vectores son linealmente independientes.

22. *Dados tres vectores linealmente independientes, demostrar que el sistema de tres vectores obtenido sumando dos cualesquiera de los anteriores también es linealmente independiente.*

Solución

Los vectores x, y, z son linealmente independientes $\Rightarrow$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Los vectores

$$x + y, \quad x + z, \quad y + z$$

son linealmente independientes

$$a(x+y) + b(x+z) + c(y+z) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

operando:

$$(a+b)x + (a+c)y + (b+c)z = 0$$

luego

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Por tanto, $x+y$, $x+z$, $y+z$ son linealmente independientes.

23. *Demostrar que $B = \{1, (x-2), (x-2)^2\}$ es una base del espacio vectorial $P(R)$ de los polinomios en x de grado menor o igual a 2.*

Solución

Para que sea base tiene que ocurrir que los vectores que componen la base sean linealmente independientes y que cualquier polinomio de segundo grado se pueda expresar como combinación lineal de los vectores que constituyen la base.

— Para la primera parte, si

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(x-2) + \alpha_3(x-2)^2 = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

En efecto, desarrollando:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x - 2\alpha_2 + \alpha_3 x^2 - 4\alpha_3 x + 4\alpha_3 = \bar{0}$$

agrupando:

$$(\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3)\cdot 1+(\alpha_2-4\alpha_3)x+\alpha_3x^2=\bar{0} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3&=0\\ \alpha_2-4\alpha_3&=0\\ \alpha_3&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

— Para la segunda parte, supongamos, por ejemplo, el polinomio

$$P=3x^2-10x+12$$

veamos si se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base. Por ello

$$P=a\cdot 1+b(x-2)+c(x-2)^2$$

tendremos que determinar a, b y c

$$\begin{aligned}P&=a+bx-2b+cx^2-4cx+4c=\\ &=(a-2b+4c)+(b-4c)x+cx^2=3x^2-10x+12\end{aligned}$$

igualando,

$$\left.\begin{aligned}a-2b+4c&=12\\ b-4c&=-10\\ c&=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow c=3,\ b=2,\ a=4$$

Por lo tanto, los componentes del vector P en función de la base son (a, b, c)=(4, 2, 3).

Cualquier vector se puede poner como combinación de la base.

24. *Demostrar que*

$$B=\{1,\ x,\ x(x-1),\ x(x-1)(x-2)\}$$

es una base del espacio vectorial $P(R)$ de los polinomios en x de grado inferior o igual a 3.

Solución

Para que sea base

$$\alpha_1 \cdot 1+\alpha_2 \cdot x+\alpha_3 x(x-1)+\alpha_4 x(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

Si se hace

$$x=0 \Rightarrow \alpha_1=0$$
$$x=1 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=0$$
$$x=2 \Rightarrow \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0$$
$$x=3 \Rightarrow \alpha_1+3\alpha_2+3 \cdot 2\alpha_3+3 \cdot 2 \cdot 1\alpha_4=0$$

de aquí:

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

Cualquier vector se puede poner como combinación de los vectores de la base B.

25. *Sea $B=\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3. Demostrar que los vectores*

$$(1-x^3),\ x(1-x)^2,\ x^2(1-x),\ x^3$$

son linealmente independientes.

Solución

Para que sean linealmente independientes:

$$\alpha_1(1-x)^3+\alpha_2 x(1-x)^2+\alpha_3 x^2(1-x)+\alpha_4 x^3=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1-x)^3 &= \alpha_1 - 3\alpha_1 x + 3\alpha_1 x^2 - \alpha_1 x^3 \\
\alpha_2 x(1-x)^2 &= \alpha_2 x - 2\alpha_2 x^2 + \alpha_2 x^3 \\
\alpha_3 x^2(1-x) &= \alpha_3 x^2 - \alpha_3 x^3 \\
\alpha_4 x^3 &= \alpha_4 x^3
\end{aligned}$$

sumando miembro a miembro

$$\bar{0} = \alpha_1 \cdot 1 + (-3\alpha_1 + \alpha_2) \cdot x + (3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) \cdot x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \cdot x^3$$

luego

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0 \\
-3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\
3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\
-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 &= 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Por tanto, los vectores dados son linealmente independientes.

26. *Sea $B = \{1, x, x^2\}$ una base del espacio vectorial de los polinomios de grado inferior o igual a 2. Demostrar que los vectores*

$$(1+x)^2, \; x(1+x), \; x^2$$

Son línealmente independientes.

Solución

$$\alpha(1+x)^2 + \beta x(1+x) + \gamma x^2 = \bar{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

operando resulta:

$$\alpha \cdot 1 + (2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 = 0$$

Como $\{1, x, x^2\}$ es la base, resulta $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

27. *Dado el vector x expresar éste como una combinación lineal de los vectores a y b, y encontrar las coordenadas de x con respecto a a y b en los siguientes casos:*

1) $x=(1,\ 0),\ a=(1,\ 1),\ b=(0,\ 1)$

2) $x=(1,\ 1),\ a=(2,\ 1),\ b=(-1,\ 0)$

Solución

1) $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ luego

$$(1,\ 0)=\alpha(1,\ 1)+\beta(0,\ 1)=(\alpha,\ \alpha)+(0,\ \beta)=(\alpha,\ \alpha+\beta)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l}1=\alpha\\ 0=\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=1 \text{ y } \beta=-1$$

Por tanto $\mathbf{x}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$

Las coordenadas de x con respecto a a y b son 1 y -1.

2) $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, luego

$$(1,\ 1)=\alpha(2,\ 1)+\beta(-1,\ 0)=(2\alpha,\ \alpha)+(-\beta,\ 0)=(2\alpha-\beta,\ \alpha)$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l}1=2\alpha-\beta\\ 1=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=1 \text{ y } \beta=1$$

Por tanto $\mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$

Las coordenadas de x con respecto a a y **b** son 1 y 1.

28. *Dado el vector x expresar éste como combinación lineal de u y v, y encontrar las coordenadas de x con respecto a u y v en los siguientes casos:*

1) $x=(2,\ 1),\ u=(1,\ -1),\ v=(1,\ 1)$

2) $x=(4,\ 3),\ u=(2,\ 1),\ v=(-1,\ 0)$

Solución

1) $(2,\ 1)=\alpha(1,\ -1)+\beta(1,\ 1) \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ y $\beta=\frac{3}{2}$

Las coordenadas de x con respecto a u y v son $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$

2) $(4,\ 3)=\alpha(2,\ 1)+\beta(-1,\ 0) \Rightarrow \alpha=3$ y $\beta=2$

Las coordenadas de x con respecto a u y v son 3 y 2.

29. *Se considera el exágono regular ABCDEF con centro en O y se toma como base* $\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\}=\{u_1,\ u_2\}$. *Se pide:*

1) Las coordenadas de los vértices del exágono

2) Las expresiones de los siguientes vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ *en función de los vectores de la base.*

Solución

1)

$\overrightarrow{OA}=u_1 \Rightarrow A(1,\ 0)$

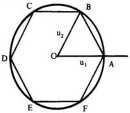
$\overrightarrow{OB}=u_2 \Rightarrow B(0,\ 1)$

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-u_1+u_2 \Rightarrow C(-1,\ 1)$

$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}=-u_1 \Rightarrow D(-1,\ 0)$

$\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OB}=-u_2 \Rightarrow (0,\ -1)$

$\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OC}=u_1-u_2 \Rightarrow F(1,\ -1)$



2) Los vectores pedidos son:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-u_1+u_2$

$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{OA}=-u_1$

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OB} = -u_2$

$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} = u_1 - u_2$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OA} = u_1$

$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{OB} = u_2$

30. *Dados los vectores*

$v_1 = (2,\ 1,\ 5,\ 3)$; $v_2 = (5,\ -3,\ 2,\ -1)$ *y* $v_3 = (-11,\ x,\ 4,\ y)$

correspondientes a un espacio vectorial V. Determinar x e y para que sean linealmente dependientes y determinar la relación de dependencia.

Solución

Como v_1 y v_2 son linealmente independientes hacemos

$$v_3 = a v_1 + b v_2$$

$$(-11,\ x,\ 4,\ y) = a(2,\ 1,\ 5,\ 3) + b(5,\ -3,\ 2,\ -1)$$

operando:

$$(-11,\ x,\ 4,\ y) = (2a,\ a,\ 5a,\ 3a) + (5b,\ -3b,\ 2b,\ -b) =$$
$$= (2a + 5b,\ a - 3b,\ 5a + 2b,\ 3a - b)$$

igualando:

$$-11 = 2a + 5b$$
$$x = a - 3b$$
$$4 = 5a + 2b$$
$$y = 3a - b$$

tomando la primera y tercera ecuación, resulta:

$$\left.\begin{aligned} -11 &= 2a + 5b \\ 4 &= 5a + 2b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 2 \text{ y } b = -3$$

de donde:

$$x = a - 3b = 2 + 9 = 11$$

$$y = 3a - b = 6 + 3 = 9$$

La relación de dependencia es:

$$v_3 = av_1 + bv_2 = 2v_1 - 3v_2$$

31. *Determinar los valores de m y n para que el vector (1, −1, m, n) del espacio vectorial V de dimensión 4 pertenezca al subespacio vectorial engendrado por los vectores:*

$$(2,\ 1,\ 3,\ 4) \text{ y } (1,\ 2,\ -1,\ 2)$$

Solución

Se ha de cumplir que:

$$(1,\ -1,\ m,\ n) = a(2,\ 1,\ 3,\ 4) + b(1,\ 2,\ -1,\ 2)$$

operando

$$(1,\ -1,\ m,\ n) = (2a,\ a,\ 3a,\ 4a) + (b,\ 2b,\ -b,\ 2b) =$$
$$= (2a + b,\ a + 2b,\ 3a - b,\ 4a + 2b)$$

e igualando:

$$1 = 2a + b$$
$$-1 = a + 2b$$
$$m = 3a - b$$
$$n = 4a + 2b$$

tomando las dos primeras

$$\left.\begin{array}{r} 1 = 2a + b \\ -1 = a + 2b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1 \text{ y } b = -1$$

Sustituyendo en las dos últimas:

$$m = 4 \qquad n = 2$$

3. Determinantes, Matrices y Sistemas

CONCEPTOS TEORICOS

— **Matriz:** Un conjunto de $m \times n$ elementos de un cuerpo K distribuidos en un cuadro de m filas y n columnas se llama matriz sobre K.

— **Determinante:** Dada una matriz cuadrada A de orden n, le asociamos un número llamado determinante que es la suma de todos los productos posibles de n elementos elegidos de modo que haya un elemento de cada fila y uno de cada columna, anteponiendo a cada producto el signo + o − según que las permutaciones que indican la fila y la columna sean de la misma o de distinta clase.

— **Menor complementario:** Si en una matriz cuadrada de orden n se suprime la fila i y la columna j, se obtiene otra matriz de orden $n-1$, cuyo determinante se llama menor complementario del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}.

— **Adjunto de un elemento:** El adjunto de a_{ij} es

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

— **Matriz traspuesta:** Es la que resulta de cambiar filas por columnas. Se escribe A^T.

— **Matriz adjunta** de una matriz cuadrada A de orden n es la matriz que resulta de sustituir cada elemento a_{ij} de A por su adjunto A_{ij} en el determinante $|A|$ y después trasponer la matriz así obtenida.

— **Matriz inversa** de una matriz cuadrada A no singular es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$$

— **Rango de una matriz:** Es el orden del mayor menor no nulo.

— **Matrices ortogonales:** Una matriz cuadrada A es ortogonal si $A^T=A^{-1}$.

— **Regla de Cramer:** En un sistema de n ecuaciones con n incógnitas siendo el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas distinto de cero ($\Delta\neq 0$), la solución del sistema es

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$$

en donde Δ_i es el determinante obtenido suprimiendo la columna i por la columna de términos independientes en Δ.

— **Teorema de Rouché-Frobenius:** Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas x_i, si llamamos A a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas y **B** a la matriz que resulta de agregarle a la anterior la columna de términos independientes y llamando a $r(A)=h$ y a $r(B)=h'$, resulta que si

$$h\neq h' \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$h=h' \Rightarrow \text{Sistema compatible}\begin{cases} h=n & \text{determinado}\\ h<n & \text{indeterminado}\end{cases}$$

PROBLEMAS

1. *Calcular el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5\\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5\\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5\\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5\\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución

Restando de cada columna la última resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=(-4)(-3)(-2)(-1)5=120$$

2. *Calcular el valor del determinante* Δ_8

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 8 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & 8 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & 8 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & 8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Solución

Sumando a la 2.ª, 3.ª, ..., 8.ª fila la 1.ª resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \dots & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \dots & 16 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$$

3. *Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Solución

Multiplicamos la 1.ª fila por a, la 2.ª fila por b y la 3.ª fila por c, dividiendo por abc para que el determinante no varíe:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}abc\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

4. *Calcular el valor del siguiente determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución

Seguimos los siguientes pasos:

Restamos la 1.ª columna al resto de columnas, resultando:

$$\Delta = 16$$

5. *Calcular el determinante de la matriz*

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Sumando la 1.ª fila a todas las demás, el determinante no varía, quedando:

$$|\Delta_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Este determinante corresponde a una matriz triangular, siendo su resultado el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 \ \dots \ \cdot 2 = 2^{n-1}$$

6. *Calcular el valor del determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Solución

Restando a cada columna la 1.ª resulta:

$$\Delta = a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n$$

7. *Calcular el valor del determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots & (n+2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$$

Solución

Restando a cada fila la anterior, resulta:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots & (n+2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & 7 & \dots & 2n+1 \\ 5 & 7 & 9 & \dots & 2n+3 \\ 7 & 9 & 11 & \dots & 2n+5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=$$

Restando de la 3.ª fila la 2.ª y de la 4.ª la 3.ª resulta:

$$=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & 7 & \dots & 2n+1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0$$

ya que tiene dos filas iguales.

8. *Calcular el valor del determinante:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & p+q & p+2q & \dots & p+(n-1)q \\ p+q & p+2q & p+3q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & p+4q & \dots & p+(n+1)q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+(n-1)q & p+nq & p+(n+1)q & \dots & p+2(n-1)q \end{vmatrix}$$

Solución

Restando a cada columna la anterior:

$$\Delta=0$$

9. *Demostrar, sin desarrollar ninguno de los determinantes, la siguiente identidad:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1+2 & 0+1 & 5+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

10. *Demostrar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(a+b+c)$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) & (b-c)(b^2+bc+c^2) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2-(a^2+ab+b^2) \end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2+ab+b^2 & c^2+bc-ab-a^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)(c^2+bc-ab-a^2)=(a-b)(b-c)[b(c-a)+(c-a)(c+a)]=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

11. *Determinar el rango de la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12-4=8\neq 0 \Rightarrow r(A)\geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=24+20-90-16=-62\neq 0 \Rightarrow r(A)\geqslant 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

por ser la 4.ª fila combinación lineal de la 1.ª y de la 2.ª (1.ª fila – 2.ª fila).

Por tanto el rango de A es 3.

12. *Determinar el rango de la matriz A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$r(A) = 4$$

13. *Determinar la matriz X que verifica la relación*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3\ X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = 3\ X$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 3\ X$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3\ X \Rightarrow X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

14 *Determinar la matriz cuadrada X que verifica la ecuación*

$$A \cdot B - C \cdot X = I$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$X = C^{-1}(AB - I) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

15 *Resolver la ecuación*

$$AC - BX = 2\ I$$

siendo

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y X una matriz cuadrada de tercer orden.

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}X=2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}=X$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -2 & 29 \\ 19 & -2 & 47 \\ -17 & 2 & -53 \end{bmatrix}$$

16. *Dadas las matrices A y B*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver la ecuación: $3A-2BX=I$ siendo X una matriz cuadrada de tercer orden e I la matriz identidad de tercer orden.

Solución

$$X=(2B)^{-1}(3A-I)=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -4 & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

17. *Demostrar que la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

verifica la relación $A^n=3^{n-1}A$

Solución

Calculamos:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=3A$$

$$A^3=A^2\cdot A=3AA=3A^2=3(3A)=3^2A=3^2\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Suponiendo que es cierta $A^{n-1}=3^{n-2}\cdot A$

vamos a probar que se verifica $A^n=3^{n-1}\cdot A$. En efecto:

$$A^n=A^{n-1}\cdot A=3^{n-2}\cdot A\cdot A=3^{n-2}\cdot A^2=3^{n-2}\cdot 3\cdot A=3^{n-1}\cdot A$$

18. *Dadas las matrices:*

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad B=A-I$$

Calcular:

1) B^n *para* $n\in N$

2) A^n *para* $n\in N$

Solución

1) Obtenemos las potencias sucesivas de B

$$B^1=A-I=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $n \geqslant 3 \Rightarrow B^n = 0$

2) Las potencias sucesivas de A son:

$$A^n = (B+I)^n = (I+B)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

ya que $B^3 = B^4 = \cdots = B^n = 0$

Por tanto:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. *Sea la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1) Las potencias sucesivas de A

2) *Sea* $B=I+A$. *Expresa* B^n *en función de* I, A *y* A^2, *siendo* I *la matriz identidad.*

3) *Demostrar que* $B^{-1}=I-A+A^2$

Solución

1)

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\4&0&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^4=\cdots=A^n=0 \qquad (n\geqslant 3)$$

2)

$$B^n=(I+A)^n=\binom{n}{0}I^n+\binom{n}{1}I^{n-1}A+\binom{n}{2}I^{n-2}A^2+\cdots+\binom{n}{n}A^n=$$

$$=I+nA+\binom{n}{2}A^2=I+nA+\frac{n(n-1)}{2}A^2$$

3)

$$B\cdot B^{-1}=I\Rightarrow (I+A)(I-A+A^2)=I-A+A^2+A-A^2+A^3=I$$

Por tanto

$$BB^{-1}=I$$

De la misma forma: $B^{-1}B=I$

20. *Sea* M *una matriz cuadrada tal que* $M^2=M$ *y* N *otra matriz cuadrada tal que* $N=2M-I$.

Demostrar que N^2 *es igual a la matriz identidad.*

Solución

$$N=2M-I$$

$$N^2 = (2M - I)^2 = 4M^2 - 4M + I = 4M - 4M + I = I$$

21. *Demostrar que si la matriz M verifica*

$$M^2 - M - I = 0$$

entonces existe la matriz inversa de M.

Solución

$$M^2 - M - I = 0 \Rightarrow M^2 - M = I \Rightarrow M(M - I) = I$$

de donde $M - I = M^{-1}$ ya que $MM^{-1} = I$

22. *Demostrar que el conjunto de matrices de la forma*

$$M(x) = \begin{bmatrix} \cos ax & \operatorname{sen} ax \\ -\operatorname{sen} ax & \cos ax \end{bmatrix}$$

siendo $a \in R$ y fijo y $\forall x \in R$, forma un grupo multiplicativo $[\mathscr{M}, \cdot]$

Solución

Comprobamos las propiedades:

— *Operación interna:* $M(x) \cdot M(y) \in \mathscr{M}$

$$M(x)\ M(y) = \begin{bmatrix} \cos ax & \operatorname{sen} ax \\ -\operatorname{sen} ax & \cos ax \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos ay & \operatorname{sen} ay \\ -\operatorname{sen} ay & \cos ay \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos ax \cdot \cos ay - \operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} ay & \cos ax \cdot \operatorname{sen} ay + \operatorname{sen} ax \cdot \cos ay \\ -\operatorname{sen} ax \cdot \cos ay - \cos ax \cdot \operatorname{sen} ay & -\operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} ay + \cos ax \cdot \cos ay \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos a(x+y) & \operatorname{sen} a(x+y) \\ -\operatorname{sen} a(x+y) & \cos a(x+y) \end{bmatrix} = M(x+y)$$

— *Propiedad asociativa*

$$[M(x) \cdot M(y)]\, M(z) = M(x)\,[M(y) \cdot M(z)]$$

$$M(x+y) \cdot M(z) = M(x) \cdot M(y+z)$$

$$M[(x+y)+z] = M[x+(y+z)]$$

— *Elemento neutro:* Es la matriz $M(0)$

$$M(0) \cdot M(x) = M(0+x) = M(x)$$

— *Elemento simétrico:* El simétrico de $M(x)$ es $M(-x)$

$$M(-x) = \begin{bmatrix} \cos(-ax) & \operatorname{sen}(-ax) \\ -\operatorname{sen}(-ax) & \cos(-ax) \end{bmatrix}$$

cumpliéndose: $M(x) \cdot M(-x) = M(x-x) = M(0)$

— *Propiedad conmutativa:*

$$M(x) \cdot M(y) = M(x+y) = M(y+x) = M(y) \cdot M(x)$$

Por tanto $(\mathcal{M}, \cdot)$ es grupo abeliano

23. *Demostrar que el conjunto de matrices de la forma*

$$M(x) = \begin{bmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en donde $a \neq 0$ es un número fijo y x un número real, tiene estructura de grupo respecto a la multiplicación.

Solución

Comprobamos las propiedades:

— *Operación interna:*

$$M(x) \cdot M(y) = \begin{bmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(x+y)$$

— *Propiedad asociativa*

$$[M(x)\cdot M(y)]\,M(z)=M(x)\,[M(y)\cdot M(z)]$$

— *Elemento neutro:*

$$M(x)\cdot M(e)=M(x)$$

$$M(x+e)=M(x)\Rightarrow e=0$$

luego

$$M(0)=\begin{bmatrix} a^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ es el elemento neutro}$$

— *Elemento simétrico:*

$$M(x)\cdot M(-x)=M(x-x)=M(0)$$

luego

$$M(-x)=\begin{bmatrix} a^{-x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

es el elemento simétrico de $M(x)$.

— *Propiedad conmutativa:*

$$M(x)\cdot M(y)=M(y)\cdot M(x)$$

Por tanto $(\mathcal{M},\ \cdot\ )$ es grupo conmutativo

24. *Sea R el conjunto de los números reales y A el conjunto de las matrices de la forma:*

$$\begin{bmatrix} x & 2x\\ 3x & 4x\end{bmatrix}$$

con x número real.

Definimos la aplicación $f\colon R \longrightarrow A$ dada por:

$$f(x)=\begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{bmatrix} \qquad \forall x \in R$$

Demostrar si f es o no isomorfismo o un homomorfismo con respecto a las operaciones ordinarias de suma de números reales y suma de matrices. Lo mismo para el producto de números reales y el producto de matrices.

Solución

Se tiene que cumplir:

$$f: R \longrightarrow A$$

$$x \longrightarrow \begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{bmatrix}$$

$$y \longrightarrow \begin{bmatrix} y & 2y \\ 3y & 4y \end{bmatrix}$$

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Veamos:

$$f(x)+f(y)=\begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y & 2y \\ 3y & 4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y & 2(x+y) \\ 3(x+y) & 4(x+y) \end{bmatrix}=f(x+y)$$

Respecto a la suma es homomorfismo pero al ser f aplicación biyectiva, se trata de un isomorfismo.

2) $f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y)$

$$f(x) \cdot f(y)=\begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 2y \\ 3y & 4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xy+6xy & 2xy+8xy \\ 3xy+12xy & 6xy+16xy \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 7xy & 10xy \\ 15xy & 22xy \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} xy & 2xy \\ 3xy & 4xy \end{bmatrix}=f(x \cdot y)$$

Para el producto no hay homomorfismo

25. *Dadas las matrices*

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar x e y para que sean tres matrices dependientes y calcular la relación de dependencia.

Solución

Ponemos la matriz M dependiendo de N y P

$$M=aN+bP$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Operando:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 4a \\ 5a & 2a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b & 2b \\ 3b & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & 4a+2b \\ 5a+3b & 2a+b \end{bmatrix}$$

Igualando:

$$3=a+b$$
$$2=4a+2b$$
$$x=5a+3b$$
$$y=2a+b$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3=a+b \\ 2=4a+2b \end{array}\right\} \Rightarrow a=-2 \text{ y } b=5$$

Sustituyendo en las dos últimas:

$$x=5a+3b=-10+15=5$$
$$y=2a+b=-4+5=1$$

La relación de dependencia es:

$$M=-2N+5P$$

26. *Sea la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{bmatrix}$$

Encontrar el valor de m para que existan matrices B no nulas, tales que

$$AB=0$$

Solución

Sea $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces se verifica:

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+mc & 3b+md \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r} a+2c=0 \\ b+2d=0 \\ 3a+mc=0 \\ 3b+md=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-2c \\ b=-2d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (-6+m)c=0 \\ (-6+m)d=0 \end{array}\right\}$$

Puede ocurrir

$$-6+m=0 \quad ó \quad c=0$$
$$-6+m=0 \quad ó \quad d=0$$

Por tanto, $m=6$ ó $c=d=0$, pero si $c=d=0$ entonces $a=0$ y $b=0$ y resultaría $B=0$, por lo que desechamos esta solución y nos quedamos con:

$$m=6$$

Por tanto,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

27. *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=3\\ x-y&=1\\ 2x+y&=0 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Formamos las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 1 & -1\\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y calculamos su rango

$$r(A)=2 \quad \text{y} \quad r(B)=3$$

$$r(A)\neq r(B)$$

El sistema es incompatible, no tiene solución.

28. *Estudiar y resolver si es posible el sistema*

$$\begin{aligned} 2x+3y-\ z&=1\\ x-y-\ z&=2\\ x-\ y-2z&=1\\ x+\ y-3z&=0 \end{aligned}$$

Solución

El sistema es incompatible, no tiene solución.

29. *Resolver matricialmente el siguiente sistema*

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=2\\ x+\ y-\ z&=4\\ y+2z&=-3 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Puesto el sistema de forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando los dos miembros a la izquierda por la matriz inversa de la formada por los coeficientes resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$x = 4, \quad y = -1, \quad z = -1$$

30. *Resolver matricialmente el siguiente sistema*

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= 2 \\ 2x+y-z &= 1 \\ y+z-t &= -3 \\ x-y+z-t &= 0 \end{aligned}$$

Solución

El sistema puesto matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solución es

$$x=1, \quad y=-1, \quad z=0, \quad t=2$$

31. *Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 3x-2y&=-1 \\ ax+\ y&=\ 0 \\ 2x-3y&=\ 2 \\ 4x-7y&=-4 \end{aligned}$$

Solución

Formamos las matrices A y B

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 48 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3$$

Para cualquier valor de a: $r(A) \neq r(B)$, por tanto, el sistema es incompatible.

32. *Discutir y resolver si es posible el sistema para los distintos valores del parámetro b*

$$\begin{aligned} x-3y&=2 \\ x-by&=1 \\ x-2y&=0 \\ 2x-2y&=4 \end{aligned}$$

Solución

El sistema es incompatible cualquiera que sea el valor del parámetro b, pues

$$r(A)=2 \text{ y } r(B)=3$$

33. *Determinar los valores de m para los que admita solución el sistema homogéneo de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} mx+y+z&=0 \\ x+my+z&=0 \\ x+y+mz&=0 \end{aligned}$$

Solución

Hacemos:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2) = 0$$

— Para $m=1$ y $m=-2$ el sistema tiene solución distinta a la trivial.

— Para $m=1$, el sistema resulta compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-(y+z)$$

Para cada par de valores de (y, z) se obtiene un valor de x.

— Para $m=-2$, el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{array}{r} -2x+\ y+\ z=0 \\ x-2y+\ z=0 \\ x+\ y-2z=0 \end{array}$$

Eliminando la tercera ecuación:

$$\begin{array}{r} -2x+y=-z \\ x-2y=-z \end{array}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{2z+z}{3}=z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{2z+z}{3}=z$$

Para cada valor de z se obtiene un valor de x y otro de y.

34. *Estudiar y resolver el siguiente sistema homogéneo para los distintos valores de a*

$$\begin{array}{l} x+ay+z=0 \\ ax \qquad -z=0 \\ x+2y \qquad =0 \end{array}$$

Solución

Para $a\neq -2$ el sistema tiene de solución: $x=y=z=0$

Para $a=-2$ el sistema es compatible indeterminado de solución: $x=x$, $y=-\frac{x}{2}$, $z=-2x$.

35. *Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro a:*

$$\begin{aligned} x+ay+\ z&=1\\ x+\ y+az&=0\\ ax+\ y+\ z&=1 \end{aligned}$$

Solución

Formamos las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 0\\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+a^3+1-a-a-a=a^3-3a+2= =(a-1)^2(a+2)=0$$

— Para $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Rightarrow r(A)=r(B)=3$.

El sistema es compatible determinado tiene una solución para cada valor que demos a a distinto de los antes citados.

— Para $a=1$

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y+z&=0\\ x+y+z&=1 \end{aligned}$$

$$r(A)=1 \text{ y } r(B)=2 \Rightarrow r(A)\neq r(B)$$

El sistema es incompatible

— Para $a=-2$

$$\begin{aligned} x-2y+\ z&=1\\ x+\ y-2z&=0\\ -2x+\ y+\ z&=1 \end{aligned}$$

$$r(A)=2 \text{ y } r(B)=3 \Rightarrow r(A)\neq r(B)$$

El sistema es incompatible

36. *Estudiar el sistema según los posibles valores del parámetro m*

$$\begin{aligned} -2x+\ y+\ z&=\ 0\\ x+my+\ z&=\ 1\\ x+\ y+mz&=-1 \end{aligned}$$

Solución

Para $m \neq 1$ y $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado

Para $m = 1$ el sistema es incompatible

Para $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado

37. *Discutir el sistema*

$$\begin{aligned} x+7y&=\ 2\\ ax+\ y&=-1\\ bx-2y&=\ 3 \end{aligned}$$

según los valores de los parámetros a y b.

Solución

Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ a & 1 \\ b & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ b & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

tienen como rango

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - 7a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{7}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ b & -2 \end{vmatrix} = -2 - 7b = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{7}$$

Entonces para $a \neq \frac{1}{7}$ o $b \neq -\frac{2}{7} \Rightarrow r(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ b & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 7b - 4a - 2b - 2 - 21a = 1 - 9b - 25a = 0$$

$$\Rightarrow b=\frac{1-25a}{9}$$

Por tanto

1) Si $b\neq\frac{1-25a}{9} \Rightarrow r(B)=3 \Rightarrow$ Sistema incompatible

2) Si $b=\frac{1-25a}{9}$ y $a\neq\frac{1}{7} \Rightarrow r(A)=r(B)=2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

3) Si $b=\frac{1-25a}{9}$ y $a=\frac{1}{7} \Rightarrow b=-\frac{2}{7}$ entonces

$$r(A)=1 \text{ y } r(B)=2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

38. *Discutir el sistema según los distintos valores de los parámetros a y b*

$$\begin{aligned} 4x-ay+\ b&=0\\ ax-4y-2b&=0\\ x-\ y+\ 7&=0 \end{aligned}$$

Solución

El sistema se puede poner de la forma

$$\begin{aligned} 4x-ay&=-b\\ ax-4y&=2b\\ x\ -y&=-7 \end{aligned}$$

Llamando

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -a\\ a & -4\\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & -a & -b\\ a & -4 & 2b\\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -a\\ a & -4 \end{vmatrix}=-16+a^2=0 \Rightarrow a=\pm 4 \qquad \begin{vmatrix} a & -4\\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-a+4=0 \Rightarrow a=4$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -a & -b\\ a & -4 & 2b\\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix}=112-2ab+ab-4b+8b-7a^2=0$$

$$\Rightarrow b=\frac{112-7a^2}{a-4}=\frac{-7(a-4)(a+4)}{a-4}$$

Podemos hacer el siguiente estudio:

1) Para $\left\{\begin{array}{l} b\neq \dfrac{112-7a^2}{a-4} \\ a\neq 4 \end{array}\right.$ el $\left.\begin{array}{l} r(B)=3 \\ r(A)<3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sistema incompatible

2) Si $a=4$ y $b=\dfrac{112-7a^2}{a-4} \Rightarrow r(A)=1$ y $r(B)=2 \Rightarrow$ Sistema incompatible

3) Si $a\neq 4$ y $b=\dfrac{112-7a^2}{a-4} \Rightarrow r(A)=r(B)=2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

4) Si $a\neq -4$ y $b=\dfrac{112-7a^2}{a-4} \Rightarrow r(A)=r(B)=2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

5) Si $a=-4 \Rightarrow b=0 \Rightarrow r(A)=r(B)=2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

39. *Discutir y resolver cuando sea posible el sistema*

$$\begin{aligned} x-\ y+2z&=1 \\ x+2y+\ z&=0 \\ 2x+\ y+nz&=1 \\ (4m-1)y+nz&=3 \end{aligned}$$

según los distintos valores de los parámetros m y n.

Solución

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & n \\ 0 & 4m-1 & n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & n & 1 \\ 0 & 4m-1 & n & 3 \end{bmatrix}$$

Para calcular r(B) hacemos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & n & 1 \\ 0 & 4m-1 & n & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & n-2 & 1 \\ 0 & 4m-1 & n & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & n-2 & 1 \\ 4m-1 & n & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -[-9(n-2)+4m-1-3n-(n-2)(4m-1)+3n+9] =$$

$$= -[-9+18+4m-1-(4nm-8m-n+2)+9] =$$

$$= -[-8+12m-4nm+24] = 8n-12m+4nm-24 = 0$$

$$8n-24 = 12m-4nm$$

$$8(n-3) = 4m(3-n)$$

$$2(n-3) = m(3-n) \Rightarrow \text{si } n \neq 3 \Rightarrow m = -2$$

Por tanto:

1) Si $m \neq -2$ y $n \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=3 \\ r(B)=4 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema incompatible.

2) Si $m = -2$ y $n \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=3 \\ r(B)=3 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

3) Si $m \neq -2$ y $n = 3 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=3 \\ r(B)=3 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

4) Si $m = -2$ y $n = 3 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=2 \\ r(B)=2 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

40. *Estudiar el sistema según los distintos valores del parámetro a*

$$\begin{aligned} ax+y+z &= a^2 \\ x-y+z &= 1 \\ 3x-y-z &= 1 \\ 6x-y+z &= 3a \end{aligned}$$

Solución

— Para $a=2$ el sistema es compatible determinado, siendo la solución única.

— Para $a \neq 2$ el sistema es incompatible.

41. *Estudiar el sistema*

$$\begin{aligned} ax+y+z&=a^2\\ x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=1\\ 6x-y+z&=3a \end{aligned}$$

según los valores del parámetro a.

Solución

Las matrices del sistema:

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1\\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{bmatrix}$$

$$r(A)=3 \quad \forall a$$

Calculamos el rango de B

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2\\ 1+a & 0 & 2 & 1+a^2\\ 3+a & 0 & 0 & 1+a^2\\ 6+a & 0 & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1+a^2\\ 3+a & 0 & 1+a^2\\ 6+a & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} = -4(a-2)^2$$

de donde:

— Si $a \neq 2 \Rightarrow r(B)=4$ por tanto $r(A) \neq r(B)$ y el sistema es incompatible.

— Si $a=2 \Rightarrow r(B)=3$ por tanto $r(A)=r(B)$ el sistema es compatible determinado, siendo la solución

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=6 \end{array}\right\} x=1,\ y=1,\ z=1$$

42. *Estudiar la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro m y resolverlo en los casos en que sea posible*

$$\begin{aligned} x+3y-\ z&=1 \\ x+\ y\ \ \ \ \ \ &=-2 \\ -x+\ y+mz&=5 \\ y+2z&=0 \end{aligned}$$

Solución

— Para el valor del parámetro $m=-1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución única

$$x=-\frac{16}{5}\ ,\quad y=\frac{6}{5}\ ,\quad z=-\frac{3}{5}$$

— Para valores del parámetro $m \neq -1$ el sistema es incompatible.

43. *Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro m*

$$\begin{aligned} m\ \ x+(m-1)y+\ z&=m+1 \\ (m+2)x+\ \ \ \ \ \ \ \ \ y+\ z&=m+1 \\ (m+1)x\ \ \ \ \ \ \ \ +(m+1)z&=m+1 \end{aligned}$$

Solución Formamos las matrices

$$A=\begin{bmatrix} m & m-1 & 1 \\ m+2 & 1 & 1 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} m & m-1 & 1 & m+1 \\ m+2 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & 0 & m+1 & m+1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m=0,\ m=1 \text{ y } m=-1$$

— Si $m \neq 0$, $m \neq 1$, $m \neq -1 \Rightarrow r(A)=r(B)$ y el sistema es compatible determinado teniendo solución única.

— Si $m=0 \Rightarrow r(A)=r(B)=2$ y el sistema es compatible indeterminado teniendo infinitas soluciones.

— Si $m=1 \Rightarrow r(A)=2$ y $r(B)=3$. El sistema es incompatible y no tiene solución.

— Si $m=-1 \Rightarrow r(A)=r(B)=2$ y el sistema es compatible indeterminado teniendo infinitas soluciones.

44. *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a*

$$\begin{aligned} 2x+3y-\ z&=a \\ x+2y+3z&=1 \\ 5x+8y+\ z&=3 \end{aligned}$$

Solución

$r(A)=2$ por ser la 3.ª fila la suma del doble de la primera y de la 2.ª, cualquiera que sea el valor del parámetro a.

$r(B)=2$ para $a=1$, ya que la 3.ª fila será la suma del doble de la 1.ª y de la 2.ª.

Por tanto, para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado teniendo infinitas soluciones. Para $a \neq 1$ el sistema es incompatible no teniendo solución.

45. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} x+ay-z&=-2 \\ (a+1)x+\ y+z&=a+2 \\ 5x-\ y-z&=-2 \end{aligned}$$

para cada uno de los valores de a que lo hacen compatible.

Solución

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a+1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & -2 \\ a+1 & 1 & 1 & a+2 \\ 5 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A|=a^2+7a+6=(a+6)(a+1)=0$$

— Para $a=-1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow r(A)=2$ y $r(B)=3$.

. El sistema es incompatible.

— Para $a=-6 \Rightarrow r(A)=2$ y $r(B)=3$ y el sistema es incompatible.

— Para $a\neq -1$ y $a\neq -6 \Rightarrow r(A)=r(B)=3$.

El sistema es compatible determinado.

46. *Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a y resolverlo en los casos posibles*

$$\begin{aligned}(a-1)x+y+az&=0\\ ax+y-az&=0\\ x+y+az&=0\end{aligned}$$

Solución

— Para $a=0$ el sistema tiene como solución

$$x=y=0 \quad \forall z$$

— Para $a=2$ el sistema tiene como solución

$$x=-\frac{2}{3}t\ ,\quad y=t\ ,\quad z=-\frac{1}{6}t \quad \forall t$$

— Para $a\neq 0$ y $a\neq 2$ el sistema tiene como solución $x=y=z=0$.

47. *Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x+\ ay+\ z &= 1 \\ 2x+\ 3y-\ z &= 2 \\ 3x+2ay+3z &= -1 \end{aligned}$$

Solución

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2a & 3 \end{bmatrix}. \qquad y \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2a & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$r(B)=3$ cualquiera que sea el valor de a

$$|A|=9-3a+4a-9+2a-6a=0 \Rightarrow a=0$$

— Para $a\neq 0 \Rightarrow r(A)=r(B)=3$ el sistema es compatible determinado, teniendo una solución para cada valor del parámetro a.

— Para $a=0 \Rightarrow r(A)=2$ y $r(B)=3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

48. *Estudiar según los posibles valores del parámetro a el sistema*

$$\begin{aligned} ax+\ y+\ z &= 1 \\ x+ay+\ z &= 1 \\ x+\ y+az &= 1 \end{aligned}$$

Solución

— Para $a\neq 1$ y $a\neq -2$ el sistema es compatible determinado.

— Para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado.

— Para $a=-2$ el sistema es incompatible.

49. *Dado el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \\ 2x - 5y + az &= -2 \end{aligned}$$

Estudiar dicho sistema para los distintos valores de los parámetros a y b, resolviéndolo en los casos en que sea posible.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a = 1$$

— Para $a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(B)$, sistema compatible.

— Para $a = 1 \Rightarrow r(A) = 2$ y el rango de B lo hallamos tomando la 1.ª, 2.ª y 4.ª columna de B.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 3$$

Por lo que $b = 3 \Rightarrow r(B) = 2$, se tiene que el sistema tiene infinitas soluciones por ser compatible indeterminado.

— Para $b \neq 3 \Rightarrow r(B) = 3$ y entonces $r(A) \neq r(B)$ y el sistema es incompatible.

Resumiendo:

— Para $a \neq 1$ y $\forall b \Rightarrow r(A) = r(B) = 3$, sistema compatible determinado.

— Para $a = 1$ y $b = 3 \Rightarrow r(A) = r(B) = 2$, sistema compatible indeterminado.

— Para $a = 1$ y $b \neq 3$ $r(A) = 2$ y $r(B) = 3$, sistema incompatible.

50. *Encontrar el valor de a para el cual son compatibles las ecuaciones del sistema*

$$\begin{aligned} 2y - z &= a \\ 3x \quad -2z &= 11 \\ y + z &= 6 \\ 2x + y - 4z &= a \end{aligned}$$

y resolver para dicho valor de a.

Solución

— Para $a \neq 6 \Rightarrow r(A) \neq r(B)$ el sistema es incompatible.

— Para $a = 6 \Rightarrow r(A) = r(B) = 3$ el sistema es compatible determinado por ser 3 el número de incógnitas. La solución es:

$$x = 5, \quad y = 4, \quad z = 2.$$

4. Aplicaciones lineales y bilineales

CONCEPTOS TEORICOS

— **Homomorfismo entre espacios vectoriales o aplicación lineal:** Sean V y V' dos espacios vectoriales y f una aplicación de V en V', habremos establecido un homomorfismo entre espacios vectoriales o aplicación lineal si:

$$1)\quad \forall x, y \in V \Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$2)\quad \forall x \in V \ \text{y} \ \forall \alpha \in K \Rightarrow f(\alpha x)=\alpha f(x)$$

Cuando f es biyectiva tendremos definido un isomorfismo.

— **Núcleo de un homomorfismo f de V en V':** Es el conjunto de vectores de V cuya imagen por f es el elemento neutro de V'.

— **Cambio de base:** Si en un espacio vectorial V se considera una base B y otra nueva B', la expresión que nos determina la relación existente entre las coordenadas de un vector de V en ambas bases es: $[x]=[x']C$, siendo $|C|\neq 0$.

— **Expresión matricial de una aplicación lineal:**

$$[y]=[x]A$$

siendo $[x]$ las coordenadas de un vector e $[y]$ las de su imagen.

— **Expresión matricial de una aplicación lineal al cambiar de base.** Sea

$$f: V \longrightarrow V'$$

y C la matriz de cambio de base en V y C' la de cambio de base en V' y A la matriz de la aplicación lineal

$$[y'] = [x']A' = [x']C'AC^{-1}$$

— **Aplicaciones bilineales:** Sean V_1, V_2 y F tres espacios vectoriales, decimos que la aplicación f

$$f: V_1 \times V_2 \longrightarrow F$$

es bilineal, si se cumple:

1) $f(x_1+x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

$f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$

2) $f(x, y_1+y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$

$f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$

— **Aplicaciones trilineales:** Sean V_1, V_2, V_3 y F cuatro espacios vectoriales, decimos que la aplicación f

$$f: V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow F$$

es trilineal, si se cumple:

1) $f(x_1+x_2, y, z) = f(x_1, y, z) + f(x_2, y, z)$

$f(\alpha x, y, z) = \alpha f(x, y, z)$

2) $f(x, y_1+y_2, z) = f(x, y_1, z) + f(x, y_2, z)$

$f(x, \alpha y, z) = \alpha f(x, y, z)$

3) $f(x, y, z_1+z_2) = f(x, y, z_1) + f(x, y, z_2)$

$f(x, y, \alpha z) = \alpha f(x, y, z)$

PROBLEMAS

1. *Averiguar si los cuatro vectores*

$$x = (-1,\ 7,\ 2,\ -4)$$
$$y = (0,\ 1,\ -2,\ 1)$$
$$z = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$$
$$t = (1,\ 3,\ 2,\ -1)$$

son o no linealmente independientes. En caso de no serlo encon-

trar la relación de dependencia.

Solución

Para que los vectores x, y, z, t sean linealmente independientes ha de ocurrir

$$ax+by+cz+dt=\bar{0} \Rightarrow a=b=c=d=0$$

En efecto

$$a(-1, 7, 2, -4)+b(0, 1, -2, 1)+c(1, 0, 0, 1)+d(1, 3, 2, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

Igualando

$$\begin{aligned} -a \quad\; +c+ d&=0 \\ 7a+ b \quad\; +3d&=0 \\ 2a-2b \quad\; +2d&=0 \\ -4a+ b+c- d&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto los vectores x, y, z, t no son linealmente independientes ya que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas es cero.

Para hallar la relación de dependencia eliminamos la cuarta ecuación y resolvemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} -a \quad\; +c+ d&=0 \\ 7a+b \quad\; +3d&=0 \\ 2a-2b \quad\; +2d&=0 \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\begin{aligned} -a \quad\; +c&=-d \\ 7a+ b \quad\; &=-3d \\ 2a-2b \quad\; &=-2d \end{aligned}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-16$$

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -d & 0 & 1 \\ -3d & 1 & 0 \\ -2d & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{8d}{-16}=-\frac{d}{2}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -d & 1 \\ 7 & -3d & 0 \\ 2 & -2d & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-8d}{-16}=\frac{d}{2}$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -d \\ 7 & 1 & -3d \\ 2 & -2 & -2d \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{24d}{-16}=-\frac{3}{2}d$$

La relación de dependencia es:

$$ax+by+cz+dt=0$$

$$-\frac{d}{2}x+\frac{d}{2}y-\frac{3}{2}dz+dt=0 \Rightarrow x=y-3z+2t$$

2. *Averiguar si los cuatro vectores:*

$$a=(1,\ 2,\ 0,\ 0)$$
$$b=(-1,\ 3,\ 1,\ 1)$$
$$c=(4,\ 1,\ 0,\ 3)$$
$$d=(0,\ 2,\ 1,\ -2)$$

Son o no linealmente independientes. En caso de no serlo encontrar la relación de dependencia.

Solución

Son linealmente independientes por ser el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

distinto de cero.

3. *Se consideran los vectores de* V_3

$$a = (1,\ 2,\ 0)$$
$$b = (1,\ 0,\ 2)$$
$$c = (1,\ 3,\ 2)$$

Se pide:

1) ¿Constituyen una base de V_3*?*

2) ¿Depende de estos vectores el vector $x = (2,\ 1,\ 6)$*? En caso afirmativo hallar la relación de dependencia.*

3) Escribir un vector, si existe, que no dependa linealmente de los vectores dados, razonando la contestación.

Solución

1) Para que constituyan una base

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha(1,\ 2,\ 0) + \beta(1,\ 0,\ 2) + \gamma(1,\ 3,\ 2) = (0,\ 0,\ 0)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \ \gamma &= 0 \\ 2\alpha \quad + 3\gamma &= 0 \\ 2\beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Por tanto $\{a, b, c\}$ constituyen una base.

2) Para ver si el vector $x=(2, 1, 6)$ depende de $\{a, b, c\}$ tiene que ocurrir

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c$$

$$(2, 1, 6) = x_1(1, 2, 0) + x_2(1, 0, 2) + x_3(1, 3, 2)$$

igualando

$$\left.\begin{aligned} 2 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ 1 &= 2x_1 \quad\;\; + 3x_3 \\ 6 &= \quad\;\; 2x_2 + 2x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$$

Las componentes de x en función de $\{a, b, c\}$ son $(-1, 2, 1)$.

3) Cualquier vector de V_3 depende de $\{a, b, c\}$ ya que estos constituyen una base y por la propia definición de base, todo vector de un espacio vectorial se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base.

4. *Se considera un espacio vectorial V_3 y en él tres vectores:*

$$a = (1, 1, 0)$$

$$b = (0, 1, 2)$$

$$c = (3, -1, -1)$$

Se pide:

1) ¿Constituyen estos vectores una base de V_3?

2) En caso afirmativo, obtener un vector que sea combinación lineal de ellos.

Solución

1) Los vectores a, b y c son linealmente independientes por ser el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

constituyendo una base de V_3.

2) Un vector que dependa linealmente de ellos es:

$$x = 1a + 2b + 3c = (10,\ 0,\ 1)$$

Para cada tres números reales hay un vector que depende de la base.

5. *Sea M el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 sobre R y sea E el espacio vectorial de M formado por las matrices del tipo*

$$\begin{bmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{bmatrix} \quad \text{con } a,\ b,\ c \in R$$

Probar que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

forman una base B de E.

Solución

Para que A_1, A_2, A_3 sean linealmente independientes

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta+\gamma \\ -\beta+\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=0\\ \beta+\gamma=0\\ -\beta+\gamma=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Como segunda condición, cualquier vector de la forma:

$$\begin{bmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{bmatrix}$$

se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base

$$\begin{bmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{bmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

es

$$\begin{bmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. *En el espacio vectorial P_3 de los polinomios de grado menor o igual que 3.*

   Se pide:

   1) Demostrar que $\{1, (x+1), (x+1)^2, x^3\}$ es una base.

   2) Hallar las coordenadas de $(x+1)^3$ respecto a esta base.

Solución

1) La base canónica de P_3 es $B=\{1, x, x^2, x^3\}$. Respecto a esta base las coordenadas de los vectores dados son:

$$1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$1+x=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$$

$$(1+x^2)=1+2x+x^2=(1,\ 2,\ 1,\ 0)$$

$$x^3=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

siendo linealmente independientes ya que

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=4$$

Constituyen, por tanto, una base $\overline{B}$ de P_3 pues además cualquier vector de P_3 se puede poner como combinación lineal los vectores de $\overline{B}$.

2) Las coordenadas de $(x+1)^3$ respecto a esta nueva base $\overline{B}$ se calculan así:

$$x^3=[(x+1)-1]^3=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$$

$$(x+1)^3=1-3(x+1)+3(x+1)^2+x^3$$

las coordenadas de $(x+1)^3$ respecto de $\overline{B}$ son:

$$(1,\ -3,\ 3,\ 1)$$

7. *Dada la siguiente aplicación f definida entre los espacios vectoriales R y R^3 por*

$$f(x)=(x,\ 1,\ -x)$$

decir si f es un homorfismo y en caso afirmativo estudiar su núcleo e imagen.

Solución

Se debe de comprobar que se cumplen las dos condiciones de aplicación lineal u homomorfismo entre espacios vectoriales

1) $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)\quad \forall x_1,\ x_2 \in R$

2) $f(ax)=af(x)\quad \forall x \in R$ y $\forall a \in R$

Veamos la primera:

$f(x_1+x_2)=[(x_1+x_2),\ 1,\ -(x_1+x_2)]$

$f(x_1)+f(x_2)=(x_1,\ 1,\ -x_1)+(x_2,\ 1,\ -x_2)=[(x_1+x_2),\ 2,\ -(x_1+x_2)]$

Por tanto:

$$f(x_1+x_2) \neq f(x_1)+f(x_2)$$

No es un homomorfismo.

8. *Estudiar la linealidad de la aplicación*

$$f: R^2 \longrightarrow R$$

definida por: $f(x, y)=3x+2y+1$

Solución

Se ha de cumplir:

1) $f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)=f(x_1+x_2, y_1+y_2)$

2) $f[a(x, y)] = a\, f(x, y)$

y no es una aplicación lineal pues

$$f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2) \neq f(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

9. *Se considera la aplicación* $f: R^2 \longrightarrow R^2$ *definida*

$$f(x, y)=(x-y, x+y)$$

Se pide:

1) Demostrar que es una aplicación lineal

2) Hallar su núcleo

3) Hallar su imagen

Solución

1) Veamos las propiedades de la aplicación lineal

a) $f[(x_1, y_1)+(x_2, y_2)]=f(x_1+x_2, y_1+y_2)$ $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$

$f(x_1+x_2, y_1+y_2)=[(x_1+x_2)-(y_1+y_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2)] =$

$=[(x_1-y_1)+(x_2-y_2), (x_1+y_1)+(x_2+y_2)]=(x_1-y_1, x_1+y_1)$
$+(x_2-y_2, x_2+y_2)=f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)$

b) $f[k(x, y)]=f(kx, ky) \quad \forall k \in R$ y $\forall (x, y) \in R^2$

$f[k(x, y)]=f(kx, ky)=(kx-ky, kx+ky)=$
$=[k(x-y), k(x+y)]=k f(x, y)$

Es una aplicación lineal

2) El núcleo se obtiene así:

$$\mathrm{Ker} f=\{(x, y) \in R^2 | f(x, y)=(0, 0)\}$$

$$f(x, y)=(x-y, x+y)=(0, 0)$$

$$\left.\begin{matrix} x-y=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y=0$$

Por tanto $\mathrm{Ker} f=\{(0, 0)\}$

3) La imagen

$$f(x, y)=(x-y, x+y)=(x, x)+(-y, y)=x(1, 1)+y(-1, 1)$$

es un subespacio vectorial engendrado por los vectores (1, 1) y (−1, 1).

10. *Dada la siguiente aplicación f entre los espacios R^3 y R^3 definida por*

$$f(x, y, z)=(2x, x+y, 0)$$

decir si es un homomorfismo y en caso afirmativo estudiar su núcleo e imagen.

Solución

— Es homomorfismo pues

$$f(x_1, y_1, z_1)+f(x_2, y_2, z_2)=f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$f[a(x, y, z)]=af(x, y, z)$$

— El núcleo es $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, z)\ \forall z \in \mathbb{R}\}$ y para $z=1$ decimos que el núcleo está engendrado por (0, 0, 1)

— La imagen $\operatorname{Im} f = \{f(x, y, z),\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} =$

$= \{(2y, x+y, 0),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(2, 1, 0) + y(0, 1, 0),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\}$

Para $x=1$, $y=1$ la imagen está engendrada por (2, 1, 0) y (0, 1, 0)

11. *Comprobar que la aplicación*

$$f: V_2(R) \longrightarrow V_2(R)$$

siendo V_2 el conjunto de polinomios de grado igual o menor que 2, definida por:

$$f(ax^2+bx+c) = ax^2$$

es una aplicación lineal y determinar su núcleo.

Solución

$$\text{Llamando: } \begin{array}{l} P = ax^2+bx+c \\ Q = cx^2+dx+c \end{array} \text{ resulta:}$$

$$f(P+Q) = f(P) + f(Q)$$

En efecto:

$$P+Q = (a+c)x^2 + (b+d)x + (c+e)$$

$$f(P+Q) = (a+c)x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(P) = ax^2 \\ f(Q) = cx^2 \end{array}\right\} f(P+Q) = f(P) + f(Q)$$

La segunda condición: $f(rP) = rf(P)$

$$rP = rax^2 + rbx + rc$$

$$\left.\begin{array}{l} f(rP) = rax^2 \\ rf(P) = r(ax^2) \end{array}\right\} f(rP) = rf(P) \qquad \text{Se cumple}$$

— El núcleo lo forman todos los polinomios de primer grado pues tienen como imagen el elemento neutro

$$f(0x^2+bx+c)=0\cdot x^2=0$$

12. *Dada la aplicación*

$$f: V_3(R) \longrightarrow V_2(R)$$

dada por: $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1-x_2, x_2-x_3)$

Se pide:

1) Demostrar que f es un homomorfismo de V_3 en V_2

2) Matriz asociada al homomorfismo

3) Determinar las dismensiones de Imf y Kerf

Solución

1) Se trata de un homorfismo entre espacios vectoriales pues cumple las dos condiciones:

$$f[(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3)]=f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)=$$
$$=[(x_1+y_1)-(x_2+y_2), (x_2+y_2)-(x_3+y_3)]=(x_1-x_2, x_2-x_3)+$$
$$+(y_1-y_2, y_2-y_3)=f(x_1, x_2, x_3)+f(y_1, y_2, y_3)$$
$$f[a(x_1, x_2, x_3)]=f(ax_1, ax_2, ax_3)=(ax_1-ax_2, ax_2-ax_3)=$$
$$=a(x_1-x_2, x_2-x_3)=af(x_1, x_2, x_3)$$

2) Para la matriz asociada al homomorfismo se determinan las imágenes de los vectores que constituyen la base canónica (1, 0, 0); (0, 1, 0) y (0, 0, 1)

$$f(1, 0, 0)=(1, 0)$$
$$f(0, 1, 0)=(-1, 1)$$
$$f(0, 0, 1)=(0, -1)$$

Por tanto la matriz f referida a las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Las dimensiones de la imagen y del núcleo son:

$$\dim \mathrm{Im} f = r(A) = 2$$

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim V_3 - \dim \mathrm{Im} f = 3 - 2 = 1$$

13. *Dada la aplicación*

$$f: R^3 \longrightarrow R^2$$

definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y, z - y)$$

Se pide:

1) Comprobar que f es lineal

2) Hallar la imagen de la base canónica

3) Hallar la imagen del vector (1, 2, 3)

Solución

1) $f(x, y, z) = (x - y, z - y)$
$f(x', y', z') = (x' - y', z' - y')$

$$f(x + x', y + y', z + z') = [(x + x') - (y + y'), (z + z') - (y + y')] =$$
$$= [(x - y) + (x' - y'), (z - y) + (z' - y')] =$$
$$= (x - y, z - y) + (x' - y', z' - y') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

$$f[k(x, y, z)] = f(kx, ky, kz) = (kx - ky, kz - ky) =$$
$$= k(x - y, z - y) = kf(x, y, z)$$

2) La imagen de la base canónica

$$f(e_1)=f(1,\ 0,\ 0)=(1-0,\ 0-0)=(1,\ 0)$$
$$f(e_2)=f(0,\ 1,\ 0)=(0-1,\ 0-1)=(-1,\ -1)$$
$$f(e_3)=f(0,\ 0,\ 1)=(0-0,\ 1-0)=(0,\ 1)$$

3) La imagen de $x=(1,\ 2,\ 3)$ es
$$f(x)=f(1,\ 2,\ 3)=(1-2,\ 3-2)=(-1,\ 1)$$

14. *Sea f el homomorfismo*
$$f: Z^3 \longrightarrow Z^2$$
definido por:
$$f(1,0,0)=(2,-1)$$
$$f(0,1,0)=(-3,2)$$
$$f(0,0,1)=(1,5)$$
Calcular: $f^{-1}(4,\ 1)$

Solución

$$[y_1,\ y_2]=[x_1\ x_2\ x_3]\ A=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[4\quad 1]=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+x_3&=4 \\ -x_1+2x_2+5x_3&=1 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2&=4-x_3 \\ -x_1+2x_2&=1-5x_3 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}4-x_3 & -3\\ 1-5x_3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}}=11-17x_3$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4-x_3\\ -1 & 1-5x_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}}=6-11x_3$$

Luego:

$$f^{-1}(4,1)=(x_1,x_2,x_3)=(11-17x_3,6-11x_3,x_3)=$$
$$=(11,6,0)+x_3(-17,-11,1) \qquad \forall x_3\in Z$$

15. *Del conjunto R^3 se considera el endomorfismo f definido por:*

$$f(e_1)= \quad e_2+e_3$$
$$f(e_2)=e_1 \quad +e_3$$
$$f(e_3)=e_1+e_2$$

donde $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base canónica de R^3. Se pide:

1) Construir la matriz asociada al endomorfismo.

2) Probar que f es inyectiva.

Solución

1) La matriz del endomorfismo f referido a la base B es:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

2) Como $|A|=2\neq 0 \Rightarrow$ f es automorfismo $\Rightarrow$ f es inyectiva y, por lo tanto, es inyectiva.

16. *Sea $f: R^3 \longrightarrow R^3$ un endomorfismo definido por los transformados de los vectores:*

$$f(-1, 1, 3) = (6, -4, 16)$$
$$f(-2, 1, 1) = (-2, -5, 1)$$
$$f(3, 2, -1) = (1, 14, -12)$$

Hallar:

1) Las ecuaciones de la aplicación lineal.

2) ¿Es un automorfismo?

Solución

1)

$$[y] = [x] = A$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 16 \\ -2 & -5 & 1 \\ 1 & 14 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} A \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones son:

$$[y] = [x] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

2) Se trata de un automorfismo por ser:

$$r(A) = 3$$

17. *Sean los homomorfismos f y g de R^2 en R^3 definidos por:*

$$f(x, y) = (x+y, x-y, 2x+y)$$

$$g(x, y) = (x-y, x+y, x+2y)$$

Calcular:

1) Matriz asociada al homomorfismo f.

2) Matriz asociada al homomorfismo g.

3) Matriz asociada al homomorfismo f+g.

Solución

1) Hacemos:

$$\begin{matrix} f(1, 0) = (1, 1, 2) \\ f(0, 1) = (1, -1, 1) \end{matrix} \Rightarrow M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Hacemos también:

$$\begin{matrix} g(1, 0) = (1, 1, 1) \\ g(0, 1) = (-1, 1, 2) \end{matrix} \Rightarrow M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3)

$$M(f+g) = M(f) + M(g) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

18. *Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base del espacio vectorial V_4 de dimensión 4 y sea f un endomorfismo de V_4 dado por:*

$$f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$$

$$f(e_2) = e_1 \qquad + e_4$$

$$f(e_3) = \qquad e_2 \qquad - e_4$$

$$Ker f = \{e_1 + e_4\}$$

Determinar:

1) La matriz del endomorfismo.

2) Dimensión de Ker f e Im f.

3) Ecuaciones del núcleo y de la imagen.

Solución

1) Como $e_1+e_4 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(e_1+e_4)=0$

Por ser f homomorfismo: $f(e_1+e_4)=f(e_1)+f(e_4)=0$

$$f(e_4)=-f(e_1)=-(e_1+e_2-e_3)=-e_1-e_2+e_3$$

Resulta:

$$\begin{aligned} f(e_1)&=e_1+e_2-e_3 \\ f(e_2)&=e_1 \qquad\quad +e_4 \\ f(e_3)&=\quad e_2 \qquad -e_4 \\ f(e_4)&=-e_1-e_2+e_3 \end{aligned}$$

La matriz del endomorfismo es:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2)

$$\dim \operatorname{Im} f = r(A)=3$$
$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V_4 - \dim \operatorname{Im} f = 4-3=1$$

3) Ecuaciones de la imagen

$$[y]=[x]A$$

$$[y_1\ y_2\ y_3\ y_4]=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+x_2 \quad\quad -x_4 \\ y_2 &= x_1 \quad\quad +x_3-x_4 \\ y_3 &= -x_1 \quad\quad\quad\quad +x_4 \\ y_4 &= \quad\quad x_2-x_3 \end{aligned}$$

Las ecuaciones del núcleo son: $[x]A=0$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 \quad\quad -x_4 &= 0 \\ x_1 \quad\quad +x_3-x_4 &= 0 \\ -x_1 \quad\quad\quad\quad +x_4 &= 0 \\ x_2-x_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_4 \\ x_2=x_3=0 \end{cases}$$

El núcleo está engendrado por el vector (1, 0, 0, 1).

19. *Sea $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del espacio vectorial V_3 de dimensión 3 y sea f un endomorfismo de V_3 dado por:*

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1-e_2 \\ f(e_3) &= \quad e_2 \\ Ker f &= \{e_1+e_2\} \end{aligned}$$

Determinar:

1) La matriz del endomorfismo.

2) Dimensión de Kerf.

3) Dimensión de Imf.

Solución

1)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{siendo } [y]=[x]A$$

2)

$$\dim \operatorname{Ker} f = 1$$

3)

$$\dim \operatorname{Im} f = 2$$

20. *En un espacio vectorial V de dimensión 3 se consideran las bases*

$$B = \{e_1 = (1, 2, 0);\ e_2 = (0, 1, 1);\ e_3 = (2, -1, 0)\}$$

$$\overline{B} = \{u_1 = (-1, 0, -1);\ u_2 = (1, 0, 0);\ u_3 = (0, 1, 1)\}$$

Si un vector x respecto de la base $\overline{B}$ tiene como componentes (1, 2, 3), ¿qué componentes tiene respecto de la base B?

Solución

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3 = 1u_1 + 2u_2 + 3u_3$$

$x = a(1, 2, 0) + b(0, 1, 1) + c(2, -1, 0) = 1(-1, 0, -1) + 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 1)$

operando

$$(a + 2c,\ 2a + b - c,\ b) = (1, 3, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} a \quad\ + 2c = 1 \\ 2a + b - c = 3 \\ \quad\ b \qquad = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{3}{5},\ b = 2,\ c = \frac{1}{5}$$

Respecto a la base B el vector x tiene de componentes $\left(\frac{3}{5}, 2, \frac{1}{5}\right)$

21. *Encontrar las componentes de un vector de R^3, respecto de la base $B = \{(1, 2, 3);\ (3, 4, 0);\ (1, 1, 0)\}$ sabiendo que sus componentes respecto de la base $B' = \{(1, 1, 0);\ (0, 1, 1);\ (1, 0, 1)\}$ son (2, 1, 1)*

Solución

Llamando a, b, c a las componentes del vector en la base B se ha de cumplir

$$a(1, 2, 3)+b(3, 4, 0)+c(1, 1, 0)=2(1, 1, 0)+1(0, 1, 1)+1(1, 0, 1)$$

operando:

$$(a+3b+c,\ 2a+4b+c,\ 3a)=(3, 3, 2)$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} a+3b+c&=3\\ 2a+4b+c&=3\\ 3a\qquad\quad&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{2}{3}\ \text{y}\ c=\frac{13}{3}$$

22. *Consideremos un espacio vectorial V_3 y en él una base B formada por los vectores $e_1=(1, 2, 1)$; $e_2=(0, 1, 2)$ y $e_3=(1, 2, 0)$. Se pide:*

1) Encontrar otra base $\overline{B}$ en V_3

2) Si las componentes del vector x son (3, 2, 1) referidas a la base B, ¿cuáles serán sus componentes referidas a la nueva base $\overline{B}$?

Solución

1) Otra base $\overline{B}$ en V_3 estará formada por 3 vectores que sean linealmente independientes. Por ejemplo:

$$\bar{e}_1=(1, 0, 0)$$
$$\bar{e}_2=(0, 1, 0)$$
$$\bar{e}_3=(0, 0, 1)$$

2) La matriz C del cambio de base es

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

los componentes de x referidos a la nueva base son:

$$x'=(9,\ -4,\ -6)$$

23. *Sea* $B=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *una base del espacio vectorial* V_4 *y* $\overline{B}=\{e_1,\ e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3,\ e_1+e_2+e_3+e_4\}$. *Se pide:*

1) Demostrar que $\overline{B}$ *es una base de* V_4

2) Encontrar las fórmulas del cambio de base

3) Determinar las componentes del vector x en base B sabiendo que en la base $\overline{B}$ *son (1, 2, 3, 4).*

Solución

1) Para ver que son linealmente independientes se tiene

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\alpha_4 u_4=\overline{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

Sustituyendo

$$\alpha_1 e_1+\alpha_2(e_1+e_2)+\alpha_3(e_1+e_2+e_3)+\alpha_4(e_1+e_2+e_3+e_4)=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)e_1+(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)e_2+(\alpha_3+\alpha_4)e_3+\alpha_4 e_4=\overline{0}$$

Resulta

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0 \\ \alpha_3+\alpha_4&=0 \\ \alpha_4&=0 \end{aligned}\right\} \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

Efectivamente $\overline{B}$ es una base de V_4

— La matriz C de cambio de base viene dada por:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 \\ u_2 &= e_1+e_2 \\ u_3 &= e_1+e_2+e_3 \\ u_4 &= e_1+e_2+e_3+e_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) La expresión del cambio de base es: $[x]=[x']C$

3)

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [1 \ 2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [10 \ 9 \ 7 \ 4]$$

24. *En el espacio vectorial $V_3(R)$ tenemos dos bases B y B' y conocemos las expresiones de tres vectores x, y, z referidas a ambas bases. En la primera base B las componentes de estos tres vectores son: $x=(1, 2, 3)$; $y=(0, 1, 2)$; $z=(1, 0, -1)$. En la base B' $x'=(1, 0, 1)$, $y'=(0, 1, 1)$, $z'=(1, 0, 2)$. Hallar la matriz C del cambio de base.*

Solución

$$[x]=[x'] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

25. *Consideremos una aplicación lineal f, de V_3 en V_3 siendo un* *vector del núcleo el (0, 1, 1) y las imágenes de los vectores (1, 0, 0) y (3, 2, 1) los vectores (2, 0, 1) y (1, 2, 1) respectivamente. Calcular:*

1) *Matriz de la transformación*
2) *Dimensión de la imagen*
3) *Dimensión del núcleo*

Solución

1) La ecuación de la tranformación es $[y]=[x]A$

$$f(0, 1, 1)=(0, 0, 0)$$
$$f(1, 0, 0)=(2, 0, 1)$$
$$f(3, 2, 1)=(1, 2, 1)$$

Se tiene:

$$[0\ 0\ 0]=[0\ 1\ 1]A$$
$$[2\ 0\ 1]=[1\ 0\ 0]A$$
$$[1\ 2\ 1]=[3\ 2\ 1]A$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}A$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Dimensión de la imagen de f

$$\dim \operatorname{Im} f = r(A) = 2$$

3) Dimensión del núcleo

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V_3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$$

26. *Sea un homorfismo $f: R^2 \longrightarrow R^4$ determinado por:*

$$f(3, -1) = (1, 0, 1, 0)$$
$$f(-2, 1) = (0, 1, 0, 1)$$

Se pide:

1) Hallar la matriz asociada al homomorfismo

2) Hallar la ecuación de la imagen de f

Solución

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2)

$$y_1 = x_1 + 2x_2$$
$$y_2 = x_1 + 3x_2$$
$$y_3 = x_1 + 2x_2$$
$$y_4 = x_1 + 3x_2$$

27. *En V_3 se considera la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y el endomorfismo f definido respecto a la base B por:*

$$f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (\alpha_1 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)e_3$$

Calcular:

1) Expresión analítica del endomorfismo f

2) Las ecuaciones del endomorfismo

3) Las ecuaciones del núcleo

4) Dimensiones del núcleo y de la imagen

Solución

1) Para $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=\alpha_3=0 \Rightarrow f(e_1)=e_1 \quad -e_3$

Para $\alpha_2=1$ y $\alpha_1=\alpha_3=0 \Rightarrow f(e_2)= \quad e_2+e_3$

Para $\alpha_3=1$ y $\alpha_1=\alpha_2=0 \Rightarrow f(e_3)=e_1+e_2$

La matriz del endomorfismo es

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Las ecuaciones del endomorfismo son: $[y]=[x]A$

$$[y_1\ y_2\ y_3]=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \quad + x_3 \\ y_2 &= \quad x_2 + x_3 \\ y_3 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

3) Ecuaciones del núcleo

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1=-x_3,\ x_2=-x_3$$

El núcleo está engendrado por $(-1, -1, 1)$.

4) Dimensiones del núcleo y de la imagen

$$\dim \operatorname{Im} f = r(A) = 2$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$$

28. *Se considera un homomorfismo del espacio vectorial $V_3(R)$ en $V_3(R)$ dado por*

$$\begin{aligned} y_1 &= \phantom{-x_1 +{}} x_2 - x_3 \\ y_2 &= -x_1 \phantom{{}+ x_2} + 4x_3 \\ y_3 &= \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Calcular:

1) El núcleo del homomorfismo

2) El transformado del vector $z = (2, -1, 0)$ en el homomorfismo.

Solución

1) Las ecuaciones del núcleo son

$$x_2 = x_3$$

$$x_1 = 4x_3$$

está engendrado por el vector (4, 1, 1).

2) El transformado de $z = (2, -1, 0)$ es

$$[z'] = [z]A = [2 \ \ -1 \ \ 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = [-1 \ \ -2 \ \ -2]$$

29. *Se establece un homomorfismo f entre los espacios vectoriales V_3 y V_4' de tal forma que los vectores $x = (1, 2, 0)$, $y = (1, -1, -2)$, $z = (0, 1, 1)$ tienen como imágenes por f: $x' = (1, 2, 0, 1)$, $y' = (3, 1, 4, 0)$, $z' = (2, 3, 1, 1)$. Se pide:*

1) Hallar la matriz del homomorfismo.

2) Hallar las ecuaciones del núcleo.

Solución

1) La matriz del homomorfismo la obtenemos así:

$$[x'] = [x]\,A$$
$$[y'] = [y]\,A$$
$$[z'] = [z]\,A$$

de donde:

$$[1 \quad 2 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 2 \quad 0]\,A$$
$$[3 \quad 1 \quad 4 \quad 0] = [1 \quad -1 \quad -2]\,A$$
$$[2 \quad 3 \quad 1 \quad 1] = [0 \quad 1 \quad 1]\,A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} A$$

por tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 12 & 12 & 3 \\ -6 & -5 & -6 & -1 \\ 8 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Las ecuaciones del núcleo son:

$$[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]=[u_1\ \ u_2\ \ u_3]\begin{bmatrix} 13 & 12 & 12 & 3 \\ -6 & -5 & -6 & -1 \\ 8 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

de donde,

$$\begin{aligned} 13u_1-6u_2+8u_3&=0 \\ 12u_1-5u_2+8u_3&=0 \\ 12u_1-6u_2+7u_3&=0 \\ 3u_1-u_2+2u_3&=0 \end{aligned}$$

30. *Se establece un homomorfismo f entre dos espacios vectoriales R^3 y R^2 tal que los vectores*

$$\left.\begin{aligned} x&=(1,\ 2,\ 1) \\ y&=(0,-1,\ 0) \\ z&=(1,\ 5,\ 0) \end{aligned}\right\} \ \text{tienen por imagen} \ \left\{\begin{aligned} x'&=(1,\ 1) \\ y'&=(2,\ 1) \\ z'&=(1,\ -1) \end{aligned}\right.$$

Determinar:

1) La matriz del endomorfismo.

2) Dimensiones de la imagen y del núcleo.

3) Ecuaciones del núcleo.

Solución

1)

$$A=\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -2 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \qquad [y]=[x]A$$

2)

$$\dim\ \operatorname{Im} f=r(A)=2$$

$$\dim\ \operatorname{Ker} f=1$$

3)

$$[0 \quad 0]=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -2 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

de donde,

$$\left.\begin{aligned} 11x_1-2x_2-6x_3&=0 \\ 4x_1-\ x_2-\ x_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

31. *Dada la aplicación*

$$f: R^3 \longrightarrow R^3$$

mediante

$$f(e_1)=e_1-e_2$$
$$f(e_2)=e_1$$
$$f(e_3)=\qquad e_2-e_3$$

Calcular:

1) Matriz de la aplicación.

2) Probar que f es lineal.

3) Ecuaciones del núcleo.

Solución

1) La matriz de la aplicación es:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad [y]=[x]A$$

2) Hay que comprobar que

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(ax)=af(x)$$

— Para la primera:

$$\forall x=(x_1,\ x_2,\ x_3),\ y=(y_1,\ y_2,\ y_3)\in R^3$$

$$f(x+y)=f(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)=$$

$$=[x_1+y_1\ \ x_2+y_2\ \ x_3+y_3]\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=[x_1+y_1+x_2+y_2\quad -x_1-y_1+x_3+y_3\quad -x_3-y_3]$$

$$f(x)=f(x_1,\ x_2,\ x_3)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=[x_1+x_2\ \ -x_1+x_3\ \ -x_3]$$

$$f(y)=f(y_1,\ y_2,\ y_3)=[y_1\ \ y_2\ \ y_3]\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=[y_1+y_2\ \ -y_1+y_3\ \ -y_3]$$

Se cumple: $f(x)+f(y)=f(x+y)$

— Para la segunda:

$$\forall x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in R^3\ \text{ y }\ \forall a\in R$$

$$f(ax)=f(ax_1,ax_2,ax_3)=[ax_1\ \ ax_2\ \ ax_3]\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=[ax_1+ax_2\ \ -ax_1+ax_3\ \ -ax_3]$$

$$af(x)=af(x_1, x_2, x_3)=a[x_1 \ x_2 \ x_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=$$

$$=a[x_1+x_2 \quad -x_1+x_3 \quad -x_3]$$

Se cumple: $af(x)=f(ax)$

3) Las ecuaciones del núcleo vienen dadas por

$$f(x)=0$$

$$f(x_1, x_2, x_3)=[x_1 \ x_2 \ x_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=[0 \ 0 \ 0]$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 \quad &=0 \\ -x_1 \quad +x_3&=0 \\ -x_3&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$$

El núcleo está formado por el vector (0, 0, 0).

32. *Dada la transformación*

$$t: R^3 \longrightarrow R^3$$

determinada por

$$t(e_1)=e_3$$
$$t(e_2)=e_1$$
$$t(e_3)=e_2$$

Se pide:

1) Probar que t es transformación lineal.

2) Escribir la transformación $t \cdot t \cdot t$.

3) Obtener el transformado por esta transformación compuesta del vector $x=(1, 2, 3)$.

1) La matriz de la transformación t es

$$[y_1\ y_2\ y_3]=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [y]=[x]T$$

Se ha de cumplir:

$$t(x+x')=t(x)+t(x')$$
$$t(ax)=at(x)$$

— La primera de ellas

$$t(x)=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=[x_2\ x_3\ x_1]$$

$$t(x')=[x'_1\ x'_2\ x'_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=[x'_2\ x'_3\ x'_1]$$

$$t(x+x')=[x_1+x'_1\quad x_2+x'_2\quad x_3+x'_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=[x_2+x'_2\ x_3+x'_3\ x_1+x'_1]$$

Se cumple.

— La segunda

$$t(ax)=[ax_1 \ \ ax_2 \ \ ax_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=[ax_2 \ \ ax_3 \ \ ax_1]$$

$$at(x)=a[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=a[x_2 \ \ x_3 \ \ x_1]$$

También se cumple.

2) La matriz de la transformación $t \cdot t \cdot t$ la obtenemos multiplicando

$$T \cdot T \cdot T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se trata de la matriz identidad.

3) El transformado del vector $x=(1, 2, 3)$ en la transformación compuesta es el mismo (1, 2, 3).

33. *Se establece un homomorfismo f entre el espacio vectorial V_3 y el espacio vectorial V_4 dado por:*

$$f(1, 0, 1)=(1, 2, -1, 0)$$
$$f(0, 1, 1)=(1, 0, 0, 1)$$
$$f(1, 0, 0)=(0, 1, 1, 0)$$

Hallar:

1) Las ecuaciones del homomorfismo.

2) Si en V_3 se establece una nueva base B′ y en V_4 se establece también una base nueva $\overline{B}'$ siendo las matrices de cambio de base

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Hallar la expresión del homomorfismo referida a las nuevas bases y la imagen del vector $v=(1,\ 1,\ 0)$.

Solución

1) Las ecuaciones del homomorfismo las obtenemos así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2)

Se tiene:

$$[y]=[x]A$$
$$[y']C_1=[x']CA \Rightarrow [y']=[x']CAC_1^{-1}$$

Luego:

$$A'=CAC_1^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

La expresión del homomorfismo referida a las nuevas bases es:

$$
[y'] = [x'] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

La imagen del vector $v = (1, 1, 0)$ es

$$
[y'] = [1 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \;\; 1 \;\; \frac{3}{2} \right]
$$

34. *Un homomorfismo f establecido entre dos espacios vectoriales R^3 y R^2 viene dado por la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En R^3 se establece una nueva base siendo C la matriz del cambio. En R^2 se establece una nueva base siendo C_1 la matriz del cambio

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1) Determinar la expresión del homomorfismo referida a las nuevas bases.

2) La imagen del vector $x=(1, 1, 1)$ en las nuevas bases.

Solución:

1)

$$[y']=[x']CAC_1^{-1}=[x']\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2)

$$x'=(4,\ 1)$$

35. *Consideremos R^3 y R^2 con su estructura de espacio vectorial sobre R con bases $B=\{u_1, u_2, u_3\}$ y $B'=\{v_1, v_2\}$ respectivamente.*

Sea $f: R^3 \to R^2$ un homomorfismo tal que:

$$f(u_1)=\ \ v_1+3v_2$$
$$f(u_2)=-v_1+2v_2$$
$$f(u_3)=\ \ v_1-3v_2$$

Calcular:

1) Dimensión de imagen y núcleo del homomorfismo.

2) Sea $\overline{B}=\left\{\frac{1}{2}(v_1+v_2),\ \frac{1}{2}(v_1-v_2)\right\}$. *Calcular la matriz del homomorfismo referida a las bases B y* $\overline{B}$.

Solución

1) Las ecuaciones del homomorfismo son:

$$[y_1\,y_2]=[x_1\,x_2\,x_3]\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

— La dimensión de la imagen: $r(A)=2$.

— La dimensión del núcleo: $\dim \operatorname{Ker} f=3-2=1$.

2) Efectuando un cambio de base en R^2 resulta:

$$[y]=[y']C=[y']\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$[y]=[x]A \Rightarrow [y']C=[x]A \Rightarrow [y']=[x]AC^{-1}$$

$$[y']=[x]AC^{-1}=[x]\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=[x]\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=[x]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz del homomorfismo referida a la base B y $\overline{B}$ es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

36. *Sean R^3 y R^2 dos espacios vectoriales referidos a bases canónicas $B=\{e_1=(1, 0, 0), e_2=(0, 1, 0), e_3=(0, 0, 1)\}$ y $B'=\{u_1=(1, 0), u_2=(0, 1)\}$. Se efectúa un homomorfismo f de R^3 en R^2 dado por:*

$$f(e_1)=u_1+u_2$$
$$f(e_2)=u_1-u_2$$
$$f(e_3)=u_1$$

Se pide:

1) Calcular la matriz del homomorfismo y las ecuaciones del núcleo y de la imagen.

2) En R^3 se efectúa un cambio de base pasando de B a $B=\{e_1=(2, 1, 0), \bar{e}_2=(-1, 0, 1), \bar{e}_3=(0, 1, -1)\}$. Calcular la matriz del homomorfismo referida a las bases $\overline{B}$ y B'.

Solución

1)

$$[y]=[x]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1=x_1+x_2+x_3$$
$$y_2=x_1-x_2$$

Las ecuaciones del núcleo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

2)

$$[y] = [x']CA = [x']A' = [x']\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

37. *Se considera un homomorfismo del espacio vectorial V_2 en V_3 dado por*

$$f(1, 2) = (1, 0, 1)$$
$$f(0, 1) = (2, 1, 0)$$

En V_2 efectuamos un cambio de base pasando de $B = \{e_1, e_2\}$ a $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ dado por:

$$\bar{e}_1 = e_1 + e_2$$
$$\bar{e}_2 = e_1 - e_2$$

En V_3 efectuamos un cambio de base pasando de $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\bar{B}_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ dado por:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= u_1 \qquad + u_3 \\ \bar{u}_2 &= u_1 - u_2 \\ u_3 &= \qquad u_2 \end{aligned}$$

Se pide:

1) Expresar la matriz del homomorfismo en las bases primitivas.

2) Expresar la matriz del homomorfismo en las nuevas bases.

Solución

1) En las bases primitivas

$$[y]=[x]A$$

$$[1\ 0\ 1]=[1\ 2]A$$

$$[2\ 1\ 0]=[0\ 1]A$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) En las nuevas bases

$$\left.\begin{array}{l}[y]=[y']C \\ [x]=[x']C_1\end{array}\right\}[y]=[x]A$$

Sustituyendo

$$[y']C=[x']C_1A \Rightarrow [y']=[x']C_1AC^{-1}=[x']A'$$

Como

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad C_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A'=C_1AC^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

38. *Una aplicación f de R^2 en R^2 viene dada por:*

$$f(1,\ 1)=(3,\ -1)$$

$$f(2,\ 3)=(2,\ 4)$$

Hallar la matriz del homomorfismo

1) *Respecto a la base canónica*

2) *Respecto a la base* $\overline{B}=\{u_1, u_2\}$ *siendo*

$$u_1=e_1+e_2$$
$$u_2=e_1-e_2$$

Solución

1)

$$\begin{matrix}[3 \quad -1]=[1 \quad 1]A \\ [2 \quad 4]=[2 \quad 3]A\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}A$$

de donde $A=\begin{bmatrix}7 & -7\\ -4 & 6\end{bmatrix}$ por tanto:

$$[y]=[x]\begin{bmatrix}7 & -7\\ -4 & 6\end{bmatrix}$$

2) Efectuando el cambio de base

$$[y']=[x']CAC^{-1}=[x]\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 12\end{bmatrix}$$

39. *Sea f un homomorfismo definido entre dos espacios vectoriales* R^3 *y* R^2 *por*

$$f(x, y, z)=(x+y, y+z)$$

Se pide:

1) *Calcular la matriz del homomorfismo siendo las bases:*

$$B=\{e_1=(1, 0, 0);\ e_2=(0, 1, 0);\ e_3=(0, 0, 1)\}$$

$$\overline{B}=\{\bar{e}_1=(1, 0),\ \bar{e}_2=(0, 1)\}$$

de R^3 *y* R^2 *respectivamente.*

2) Se efectua un cambio de base en R^3 pasando de B a B_1 $=\{u_1=(0, 1, 1), u_2=(-1, 0, 0), u_3=(1, 1, 0)\}$ y en R^2 pasando de $\overline{B}$ a $\overline{B}_1=\{\bar{u}_1=(-1, 0), \bar{u}_2=(1, -1)\}$. Calcular la matriz del homorfismo en las nuevas bases.

Solución

1) Hacemos en $f(x, y, z)=(x+y, y+z)$

$$f(e_1)=f(1, 0, 0)=(1, 0)$$

$$f(e_2)=f(0, 1, 0)=(1, 1)$$

$$f(e_3)=f(0, 0, 1)=(0, 1)$$

La matriz del homomorfismo es

$$[y]=[x]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Cambiando de base de B a B_1

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De $\overline{B}$ a $\overline{B}_1$

$$\overline{C}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz del homomorfismo en las nuevas bases es

$$[y]=[x]A$$

$$[y']\overline{C}=[x']CA$$

$$[y']=[x']CA\overline{C}^{-1}=[x']A'$$

$$A'=CA\overline{C}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

40. *Sea f un homomorfismo de R^3 en R^3 dado por*

$$f(x, y, z)=(x, x-y, y-z)$$

Calcular:

1) La matriz del homomorfismo f considerando la base canónica $B=\{e_1=(1, 0, 0), e_2=(0, 1, 0), e_3=(0, 0, 1)\}$

2) Se cambia de base pasando de B a $\overline{B}=\{\bar{e}_1=(1, 0, 1), \bar{e}_2=(0, 1, 1), \bar{e}_3=(-1, 0, 0)\}$. Obtener la matriz del homomorfismo en la nueva base.

Solución

1) Respecto a la base canónica B

$$[y]=[x]A=[x]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Respecto a la nueva base $\overline{B}$

$$[y']=[x']CAC^{-1}=[x]A'=[x']\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

41. *En el espacio vectorial V y referida a la base $B=(e_i)$ se define el endomorfismo f por la matriz T*

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1) Determinar el transformado del vector $v=(1, 1, 1)$

2) Se adopta como nueva base B' la constituida por los vectores

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1+e_2 \\ e'_2 &= \quad\ \ e_2+e_3 \\ e'_3 &= \qquad\quad\ \ e_3 \end{aligned}$$

Obtener la matriz que caracteriza el endomorfismo en la nueva base B' y hallar el transformado del vector $w=(1, 0, 1)$.

Solución

1) El endomorfismo en B viene dado por

$$[y]=[x]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El transformado de $v=(1, 1, 1)$ es

$$[v']=[1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=[2 \quad 2 \quad 2]$$

2) La matriz del cambio de base de B a B' es

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz del endomorfismo en la nueva base es

$$[y]=[x]T \Rightarrow [y']C=[x']CT \Rightarrow [y']=[x']CTC^{-1}=[x']T'$$

$$T'=CTC^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[w']=[1 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=[2 \quad 0 \quad 2]$$

42. *Se considera una aplicación lineal de R^3 en R^3 dada por la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Efectuamos un cambio de base pasando de la base canónica B a

$$\overline{B}=\{\bar{e}_1=(1,\ 0,\ -2),\ \bar{e}_2=(0,\ 1,\ 1),\ \bar{e}_3=(1,\ 0,\ -1)\}$$

Se pide:

1) Calcular la matriz de la aplicación lineal en la nueva base.

2) Calcular la imagen del vector $x=(1,\ 2,\ 0)$ en función de la base canónica B.

3) Calcular la imagen del vector x en la nueva base $\overline{B}$.

Solución

1) $$[y'] = [x']CAC^{-1} = [x']\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $$[y] = [x]A = [1 \quad 2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [7 \quad 10 \quad 1]$$

3) $$[y'] = [x']A' = [1 \quad 2 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = [2 \quad 10 \quad 5]$$

43. *Dado el espacio vectorial R^2 y la aplicación*

$$f: R^2 \times R^2 \longrightarrow R$$

$$(x,\ y) \longrightarrow x_1\ y_1 + x_2\ y_2$$

siendo $x = (x_1,\ x_2)$ e $y = (y_1,\ y_2)$

Demostrar que f es una aplicación bilineal.

Solución

1) Tenemos que comprobar:

$$f(x+z,\ y) = f(x,\ y) + f(z,\ y) \quad \forall x,\ y,\ z \in R^2$$

En efecto

$$\begin{aligned} f(x+z,\ y) &= f[(x_1,\ x_2) + (z_1,\ z_2),\ (y_1,\ y_2)] = \\ &= f[(x_1+z_1,\ x_2+z_2),\ (y_1,\ y_2)] = \\ &= (x_1+z_1)y_1 + (x_2+z_2)y_2 = x_1y_1 + z_1y_1 + x_2y_2 + z_2y_2 = \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2) + (z_1y_1 + z_2y_2) = f(x,\ y) + f(x,\ z) \end{aligned}$$

2) $f(x,\ y+z)=f(x,\ y)+f(x,\ z) \quad \forall x,\ y,\ z \in \mathbf{R}^2$

En efecto

$$f(x,\ y+z)=f[(x_1,\ x_2),\ (y_1+z_1,\ y_2+z_2)]=x_1(y_1+z_1)+x_2(y_2+z_2)=$$
$$=x_1y_1+x_1z_1+x_2y_2+x_2z_2=(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1z_1+x_2z_2)$$
$$=f(x,\ y)+f(x,\ z)$$

3) $f(ax,\ y)=a\,f(x,\ y) \quad \forall x,\ y \in \mathbf{R}^2$ y $\forall a \in \mathbf{R}$

En efecto

$$f(ax,\ y)=f[a(x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2)]=f[(ax_1,\ ax_2),\ (y_1,\ y_2)]=$$
$$=(ax_1)y_1+(ax_2)y_2=a(x_1y_1+x_2y_2)=a\,f(x,\ y)$$

4) $f(x,\ ay)=a\,f(x,\ y) \quad \forall x,\ y \in \mathbf{R}^2$ y $\forall a \in \mathbf{R}$

En efecto

$$f(x,\ ay)=f[(x\quad x_2),\ a(y_1,\ y_2)]=f[(x_1,\ x_2),\ (ay_1,\ ay_2)]=$$
$$=x_1(ay_1)+x_2(ay_2)=a(x_1y_1+x_2y_2)=a\,f(x,\ y)$$

Se trata de una aplicación bilineal.

44. *Sea el espacio vectorial R^3 y la aplicación*

$$f: R^3 \times R^3 \longrightarrow R$$

dada por:

$$f[(x_1,\ x_2,\ x_3),\ (y_1,\ y_2,\ y_3)]=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

Demostrar que f es una aplicación bilineal.

Solución

Tenemos que comprobar:

1) $f(x+z,\ y)=f(x,\ y)+f(z,\ y) \quad \forall x,\ y,\ z \in \mathbf{R}^3$
2) $f(x,\ y+z)=f(x,\ y)+f(x,\ z) \quad \forall x,\ y,\ z \in \mathbf{R}^3$
3) $f(ax,\ y)=a\,f(x,\ y) \quad \forall a \in \mathbf{R}$ y $\forall x,\ y \in \mathbf{R}^3$

4) $f(x, ay)=af(x, y) \quad \forall a \in R \text{ y } \forall x, y \in R^3$

Lo hacemos con la 1.ª y 3.ª siendo las otras dos fácilmente comprobables.

1) $\quad f(x+z, y) \quad = f[(x_1+z_1, x_2+z_2, x_3+z_3), (y_1, y_2, y_3)] =$

$$= (x_1+z_1)y_1 + (x_2+z_2)y_2 + (x_3+z_3)y_3 =$$

$$= x_1y_1 + z_1y_1 + x_2y_2 + z_2y_2 + x_3y_3 + z_3y_3 =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3) =$$

$$= f(x, y) + f(z, y)$$

3) $\quad f(ax, y) \quad = f[(ax_1, ax_2, ax_3), (y_1, y_2, y_3)] =$

$$= (ax_1)y_1 + (ax_2)y_2 + (ax_3)y_3 =$$

$$= a(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = af(x, y)$$

Se trata, por tanto, de una aplicación bilineal, ya que también cumple la 2.ª y 4.ª.

45. *Dados los espacios vectoriales E, F y G cuyas bases son* $B = \{a_1, a_2\}$, $\overline{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ *y* $B' = \{c_1, c_2\}$ *respectivamente, se considera la aplicación bilineal*

$$f: E \times F \longrightarrow G$$

tal que

$f(a_1, b_1) = c_1 - c_2 \qquad f(a_2, b_1) = c_1 + c_2$

$f(a_1, b_2) = -c_1 + c_2 \qquad f(a_2, b_2) = c_1 + 3c_2$

$f(a_1, b_3) = c_1 + 2c_2 \qquad f(a_2, b_3) = 3c_1$

Calcular $f(x, y)$ *siendo:* $x = a_1 - 2a_2, \; y = b_1 + b_2 - b_3$

Solución

$f(x, y) = f(a_1 - 2a_2, b_1 + b_2 - b_3) = f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2) - f(a_1, b_3) -$

$$-2f(a_2,\ b_1)-2f(a_2,\ b_2)+2f(a_2,\ b_3)=(c_1-c_2)+(-c_1+c_2)-$$
$$-(c_1+2c_2)-2(c_1+c_2)-2(c_1+3c_2)+2(3c_1)=c_1-10c_2$$

46. *Dados los espacios vectoriales U, V y W, cuyas bases respectivas son $B=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\overline{B}=\{b_1,\ b_2\}$ y $B'=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$, se considera la aplicación bilineal*

$$f:\ U\times V \longrightarrow W$$

tal que:

$$f(a_1,\ b_1)=c_1+c_2+c_3 \qquad f(a_1,\ b_2)=2c_1$$
$$f(a_2,\ b_1)=-c_1+c_2-c_3 \qquad f(a_2,\ b_2)=-c_2+c_1$$
$$f(a_3,\ b_1)=2c_1-c_3 \qquad f(a_3,\ b_2)=c_1+c_3$$

Calcular $f(x,\ y)$, siendo $x=2a_1+a_2-a_3$, $y=b_1-2b_2$.

Solución

$$f(x,y)=f(2a_1+a_2-a_3,\ b_1-2b_2)=2f(a_1,b_1)+f(a_2,b_1)-$$
$$-f(a_3,b_1)-4f(a_1,b_2)-2f(a_2,b_2)+2f(a_3,b_2)=$$
$$=2(c_1+c_2+c_3)+(-c_1+c_2-c_3)-(2c_1-c_3)-4(2c_1)$$
$$-2(c_1-c_2)+2(c_1+c_3)=-9c_1+5c_2+4c_3$$

47. *Dados los tres espacios E, F y G definidos sobre el mismo cuerpo, se pide demostrar que la única aplicación lineal de $E\times F$ en G que sea una aplicación bilineal de $E\times F$ en G es la aplicación nula.*

Solución

Consideremos f como aplicación lineal y bilineal de $E\times F$ en G.

— Por ser f aplicación lineal: $f(0,\ 0)=0$.

— Por ser f aplicación bilineal: $\forall(x, y) \in E \times F$

$$f(x, y)=f(x+0, y+0)=f(x, y)+f(x, 0)+f(0, y)+f(0, 0)$$

de donde:

$$f(x, 0)+f(0, y)=0$$

Por ser f aplicación lineal:

$$f(x, 0)+f(0, y)=f[(x, 0)+(0, y)]=f(x, y)=0$$

obtenemos que $\forall(x, y) \in E \times F \Rightarrow f(x, y)=0$.

Luego la aplicación f es la aplicación nula.

48. *Dado un espacio vectorial V definido sobre el cuerpo R de los números reales, y f una aplicación bilineal simétrica $(f(x, y) = f(y, x))$ de $V \times V$ en R.*

Calcular:

1) $f(x+y, x-y)$

2) $f(x-y, x+y)$

3) $f(x+y, x+y)$

4) $f(x-y, x-y)$

Solución

1)

$$\begin{aligned} f(x+y, x-y) &= f(x, x)-f(x, y)+f(y, x)-f(y, y)= \\ &= f(x, x)-f(x, y)+f(x, y)-f(y, y)= \\ &= f(x, x)-f(y, y) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} f(x-y, x+y) &= f(x, x)+f(x, y)-f(y, x)-f(y, y)= \\ &= f(x, x)+f(x, y)-f(x, y)-f(y, y)= \\ &= f(x, x)-f(y, y) \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) &= f(x, x)+f(x, y)+f(y, x)+f(y, y)= \\ &= f(x, x)+f(x, y)+f(x, y)+f(y, y)= \\ &= f(x, x)-2f(x, y)+f(y, y) \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} f(x-y, x-y) &= f(x, x)-f(y, x)-f(x, y)+f(y, y)= \\ &= f(x, x)-f(x, y)-f(x, y)+f(y, y)= \\ &= f(x, x)+2f(x, y)+f(y, y) \end{aligned}$$

49. *Sabiendo que una aplicación bilineal dada por*

$$\begin{aligned} f: A \times B &\longrightarrow C \\ (a, b) &\longrightarrow a \otimes b \end{aligned}$$

ha de cumplir las condiciones

1) $(a_1+a_2) \otimes b=(a_1 \otimes b)+(a_2 \otimes b)$, *siendo b fijo.*

2) $a \otimes (b_1+b_2)=(a \otimes b_1)+(a \otimes b_2)$, *siendo a fijo.*

3) $na \otimes b=a \otimes nb=n(a \otimes b)$, *para* $\forall n \in R$.

¿Cómo se define una aplicación trilineal de

$$\begin{aligned} f: A \times B \times C &\longrightarrow D \\ (a, b, c) &\longrightarrow a \otimes b \otimes c \end{aligned}$$

Solución

Se han de cumplir las condiciones:

1) $(a_1+a_2) \otimes b \otimes c=(a_1 \otimes b \otimes c)+(a_2 \otimes b \otimes c)$

2) $a \otimes (b_1+b_2) \otimes c=(a \otimes b_1 \otimes c)+(a \otimes b_2 \otimes c)$

3) $a \otimes b \otimes (c_1+c_2)=(a \otimes b \otimes c_1)+(a \otimes b \otimes c_2)$

4) $na \otimes b \otimes c=a \otimes nb \otimes c=a \otimes b \otimes nc=n(a \otimes b \otimes c)$

50. *Utilizando la definición de aplicación bilineal, resolver el siguiente caso:*

La tarifa general de transporte de viajeros por carretera es de 10 pesetas por viajero y por kilómetro. ¿Cuánto se abona en un autobús de 50 viajeros y un recorrido de 80 kilómetros?

Solución

Por las propiedades de las aplicaciones bilineales, llamando

$$V = \text{viajeros}$$
$$K = \text{kilómetros}$$
$$P = \text{precio.}$$

Se tiene:

$$f: V \times K \longrightarrow P$$
$$(v, k) \longrightarrow v \otimes k$$

Además:

$$\left.\begin{array}{l} v = 1 \cdot v \\ k = 1 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow v \otimes k = vk\ (1 \otimes 1)$$

basta conocer la imagen del par (1, 1), que la escribimos

$$f(1, 1) = 1 \otimes 1$$

Como el precio de viajero por kilómetro es $1 \otimes 1 = 10$, resulta:

$$50 \otimes 80 = 50 \cdot 80 \cdot (1 \otimes 1) = 50 \cdot 80 \cdot 10 = 40.000 \text{ pesetas.}$$

51. *Utilizando la definición de aplicación trilineal, resolver el siguiente caso:*

Cuarenta alumnos utilizan en la clase de dibujo 50 cartulinas trabajando 10 horas al mes. ¿Cuántas cartulinas gastarán 60 alumnos que trabajan 12 horas al mes durante los 9 meses del curso?

Solución

Llamamos:

$$A = \text{alumnos}$$
$$H = \text{horas}$$
$$M = \text{meses}$$
$$C = \text{cartulinas.}$$

Se tiene:

$$f : A \times H \times M \longrightarrow C$$

Sabemos que $f(40, 10, 1) = 40 \otimes 10 \otimes 1 = 50$.

Como

$$40 \otimes 10 \otimes 1 = 40 \cdot 10 \cdot 1 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1) = 50$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = \frac{50}{40 \cdot 10} = \frac{1}{8}$$

Por tanto,

$$f(60, 12, 9) = 60 \otimes 12 \otimes 9 = 60 \cdot 12 \cdot 9 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1) =$$

$$= 60 \cdot 12 \cdot 9 \cdot \frac{1}{8} = 810 \text{ cartulinas.}$$

52. *Utilizando la definición de aplicación bilineal, resolver el siguiente caso:*

Un libro de 234 páginas tiene 32 líneas por página. ¿Cuántas páginas ocupará el mismo texto si se ponen 36 líneas por página?

Solución

Llamando:

$$P = \text{páginas}$$
$$L = \text{líneas}$$

$$T = \text{texto}.$$

Se tiene:

$$T \times L \longrightarrow P$$

$$(t, l) \longrightarrow t \otimes l$$

Se trata de una proporción inversa, puesto que para un mismo texto a más líneas por página resultarán menos páginas.

$$t \otimes l = t \cdot \frac{1}{l}(1 \otimes 1)$$

Por tanto,

$$1 \otimes 1 = \frac{1}{t} \cdot l \cdot (t \otimes l) = \frac{1}{1} \cdot 32 \cdot 234 = 7.488$$

Luego

$$1 \otimes 36 = 1 \cdot \frac{1}{36} \cdot (1 \otimes 1) = 1 \cdot \frac{1}{36} \cdot 7.488 = 208 \text{ páginas.}$$

53. *Utilizando la definición de aplicación bilineal, resolver el siguiente caso:*

El agua de un pozo se saca en 200 veces utilizando un cubo de 15 litros de capacidad. Calcular en cuántas veces se sacaría utilizando un cubo de 25 litros.

Solución

Se tiene:

$$P = \text{pozo}$$

$$L = \text{litros}$$

$$V = \text{veces}$$

Se trata de una proporcionalidad inversa, ya que a más litros de capacidad del cubo, menos veces se sacará el cubo

$$P \times L \longrightarrow V$$

$$(p, l) \longrightarrow p \otimes l$$

$$p \otimes 1 = p \cdot \frac{1}{1}(1 \otimes 1)$$

Por tanto:

$$1 \otimes 1 = \frac{1}{p} \cdot 1(p \otimes 1) = \frac{1}{1} \cdot 15 \cdot 200 = 3.000$$

Luego

$$1 \otimes 25 = 1 \cdot \frac{1}{25} \cdot (1 \otimes 1) = \frac{1}{25} \cdot 3.000 = 120 \text{ veces}$$

54. *Utilizando la definición de aplicación bilineal, resolver el siguiente caso:*

Nueve grifos, abiertos durante 10 horas diarias, han consumido un caudal de agua por valor de 160 pesetas. Averiguar el coste del agua vertida por 15 grifos del mismo diámetro, abiertos durante 12 horas de los mismos días.

Solución

Llamando:

$$G = \text{grifos}$$
$$H = \text{horas}$$
$$P = \text{pesetas}$$

Se tiene:

$$f: G \times H \longrightarrow P$$
$$(g, h) \longrightarrow g \otimes h$$

Comparando:

Grifos y pesetas es proporcionalidad directa

Horas y pesetas es proporcionalidad directa

Por tanto:

$$g \otimes h = g \cdot h \cdot (1 \otimes 1)$$

$$1 \otimes 1 = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{h}(g \otimes h) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot 160 = \frac{16}{9}$$

$$15 \otimes 12 = 15 \cdot 12 \cdot (1 \otimes 1) = 15 \cdot 12 \cdot \frac{16}{9} = 320 \text{ pesetas}$$

55. *Utilizando la definición de aplicación bilineal, resolver el siguiente caso:*

Doce albañiles que trabajan 6 horas diarias tardarían en hacer un trabajo 24 días; si se contratan 8 albañiles que trabajan 8 horas diarias ¿en cuánto tiempo harán la obra?

Solución

Llamando:

A = albañiles

H = horas

D = diías

Se tiene:

$$f: A \times H \longrightarrow D$$
$$(a, h) \longrightarrow a \otimes h$$

Comparando:

Días y albañiles es proporción inversa

Días y horas es proporción inversa

Por tanto:

$$a \otimes h = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{h} \cdot (1 \otimes 1)$$

de donde

$$1 \otimes 1 = a \cdot h(a \otimes h) = 12 \cdot 6 \cdot 24 = 1.728$$

$$8 \otimes 8 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}(1 \otimes 1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1.728 = 27 \text{ días}$$

56. *Utilizando la definición de aplicación trilineal, resolver el siguiente caso:*

Para construir un muro de 10 m de largo, 4 m de alto y 0,30 m de ancho se han empleado 3.000 ladrillos. ¿Cuántos ladrillos harán falta para construir un muro de 6,50 m de largo, 6 m de alto y 0,20 m de ancho?

Solución

Llamando:

L = longitud

A = altura

A' = anchura

N = número de ladrillos

Se tendrá

$$L \times A \times A' \longrightarrow N$$

$$(l,\ a,\ a') \longrightarrow l \otimes a \otimes a' = n$$

Comparando se ve que es una proporción compuesta directa, luego

$$l \otimes a \otimes a' = l \cdot a \cdot a' \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1)$$

Por tanto:

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a'} \cdot (l \otimes a \otimes a') = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0{,}30} \cdot 3.000 = \frac{3.000}{12}$$

El número de ladrillos que hacen falta con las condiciones segundas es:

$$6{,}50 \otimes 6 \otimes 0{,}20 = 6{,}50 \cdot 6 \cdot 0{,}20(1 \otimes 1 \otimes 1) =$$

$$=6{,}50 \cdot 6 \cdot 0{,}20 \cdot \frac{3.000}{12} = 1.950 \text{ ladrillos}$$

57. *Utilizando la definición de aplicación trilineal, resolver el siguiente caso:*

Con 12 botes conteniendo cada uno medio kilo de printura, se han pintado 90 metros de valla de 80 cm de altura. Calcular cuantos botes de 2 kilos de pintura serán necesarios para pintar una valla similar de 120 cm de altura y 200 metros de longitud.

Solución

Llamando:

$B = \text{botes}$

$K = \text{kilos}$

$C = \text{centímetros de altura}$

$M = \text{metros de longitud}$

Se tiene:

$$f: K \times C \times M \longrightarrow B$$

$$(k, c, m) \longrightarrow k \otimes c \otimes m = b$$

Comparando:

Botes y kilos es proporción inversa

Centimetros y botes es proporción directa

Metros y botes es proporción directa

Por tanto:

$$k \otimes c \otimes m = \frac{1}{k} \cdot c \cdot m (1 \otimes 1 \otimes 1)$$

de donde:

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = k \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{m} (k \otimes c \otimes m) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{90} \cdot 12$$

Luego:

$$2 \otimes 200 \otimes 120 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 120 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 120 \cdot \left(0{,}5 \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{90} \cdot 12\right) = 10 \text{ botes}$$

58. *Utilizando la definición de aplicación trilineal, resolver el siguiente caso:*

Para construir un canal de 200 m de largo, 120 obreros han trabajado 8 horas diarias durante 20 días. ¿Cuántos obreros se necesitarán para construir un canal de 150 m de largo en 24 días trabajando 6 horas diarias?

Solución

Llamando:

$$\begin{aligned} O &= \text{obreros} \\ L &= \text{largo} \\ H &= \text{horas} \\ D &= \text{días} \end{aligned}$$

$$f: L \times H \times D \longrightarrow O$$

$$(l, h, d) \longrightarrow l \otimes h \otimes d$$

Comparando:

Largo y obreros son magnitudes directas

Horas y obreros son magnitudes inversas

Días y obreros son magnitudes inversas

Por tanto:

$$l \otimes h \otimes d = l \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{d} (1 \otimes 1 \otimes 1)$$

de donde

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = \frac{1}{l} \cdot h \cdot d(l \otimes h \otimes d) = \frac{1}{120} \cdot 8 \cdot 20 \cdot 120 = 96$$

El número de obreros necesarios es

$$150 \otimes 6 \otimes 24 = 150 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24} \cdot 96 = 100 \text{ obreros}$$

5. Polinomios

CONCEPTOS TEORICOS

— **Polinomio:** Sea (A, +, ·) un anillo unitario conmutativo con 0 y 1 sus elementos neutros e identidad respectivamente. Se llama polinomio sobre el anillo A a toda sucesión indefinida de elementos del anillo A en la que son nulos todos los términos a partir de cierto lugar.

$$P=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ 0,\ \dots)$$

— **Suma de polinomios.** Dados

$$P_1=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ 0,\ \dots)$$

$$P_2=(b_0,\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_m,\ 0,\ \dots)$$

$$P_1+P_2=(a_0+b_0,\ a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \dots)$$

Productos de polinomios: Dados P_1 y P_2

$$P_1\times P_2=(c_0,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_i,\ \dots,\ c_s,\ 0,\ \dots)$$

siendo

$$c_i=\sum_{r=0}^{i} a_r b_{i-r}$$

— **Producto de un escalar por un polinomio**

$$\alpha P=\alpha(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ 0,\ \dots)=(\alpha a_0,\ \alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \dots,\ \alpha a_n,\ 0,\ \dots)$$

— **Otra forma de expresar el polinomio P**

$$P=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

— **División de polinomios:** Siendo (K, +, ·) un cuerpo conmutativo, $\forall A,\ B \in K[x]\ \exists$ un par único (Q, R) tal que

$$A = BQ + R \qquad (\text{grado } R < \text{grado } B)$$

— **Función polinómica:** Es una aplicación del cuerpo K en sí mismo que hace corresponder a cada elemento α el valor numérico de un polinomio $P(\alpha)$ cuando la variable $x = \alpha$.

— **Descomposición de un polinomio:**

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

PROBLEMAS

1. *Dados los polinomios:*

$$P = (3,\ 2,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$
$$Q = (4,\ -2,\ 3,\ -5,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

Se pide:

1) Descomponer P y Q en suma de monomios

2) Expresar P y Q en función de x.

3) Sumar P y Q.

Solución

1) $P = (3,\ 2,\ 1,\ 0,\ \ldots) = (3,\ 0,\ \ldots) + (0,\ 2,\ 0,\ \ldots) + (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)$

$Q = (4,\ -2,\ 3,\ -5,\ 1,\ 0,\ \ldots) = (4,\ 0,\ \ldots) + (0,\ -2,\ 0,\ \ldots) +$
$+ (0,\ 0,\ 3,\ 0,\ \ldots) + (0,\ 0,\ 0,\ -5,\ 0,\ \ldots) + (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)$

2) $P = 3 + 2x + x^2$

$Q = 4 - 2x + 3x^2 - 5x^3 + x^4$

3) $P + Q = (7,\ 0,\ 4,\ -5,\ 1,\ 0,\ \ldots) = 7 + 4x^2 - 5x^3 + x^4$

2. *Dados los polinomios A, B y C por sus coeficientes, escribirlos en función de x y determinar su suma:*

$$A=(1,\ 2,\ 3,\ 0,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ ...)$$
$$B=(2,\ 3,\ 1,\ 9,\ 8,\ 7,\ 1,\ 0,\ ...)$$
$$C=(1,\ 2,\ 3,\ 0,\ -3,\ 4,\ -7,\ 2,\ 1,\ 0,\ ...)$$

Solución

$$A=1+2x+3x^2-3x^4-2x^5-x^6$$
$$B=2+3x+x^2+9x^3+8x^4+7x^5+x^6$$
$$C=1+2x+3x^2-3x^4+4x^5-7x^6+2x^7+x^8$$
$$A+B+C=(4,\ 7,\ 7,\ 9,\ 2,\ 9,\ -7,\ 2,\ 1,\ 0,\ ...)=$$
$$=4+7x+7x^2+9x^3+2x^4+9x^5-7x^6+2x^7+x^8$$

3. *Dados los polinomios*

$$A=(1,\ 2,\ 3,\ -1,\ 5,\ 0,\ ...)$$
$$B=(3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0,\ ...)$$

Efectuar su producto y su cociente.

Solución

1) Para multiplicar dos polinomios A y B de la forma:

$$A=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ 0,\ ...)$$
$$B=(b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ 0,\ ...)$$

efectuamos el siguiente cuadro

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
b_0	$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$a_3 b_0$	$a_4 b_0$
b_1	$a_0 b_1$	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$a_4 b_1$
b_2	$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	$a_4 b_2$
b_3	$a_0 b_3$	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	$a_4 b_3$

La suma de los productos que aparecen en cada línea señalada son los elementos del polinomio resultante

	1	2	3	−1	5
3	3	6	9	−3	15
0	0	0	0	0	0
2	2	4	6	−2	10
1	1	2	3	−1	5

El producto resulta:

$$A \times B = (3,\ 6+0,\ 9+0+2,\ -3+0+4+1,\ 15+0+6+2,\ 0-2+3,\ 10-1,\ 5,\ 0,\ \ldots) = (3,\ 6,\ 11,\ 2,\ 23,\ 1,\ 9,\ 5,\ 0,\ \ldots)$$

Es un polinomio de grado 7.

2) El cociente lo efectuamos expresados A y B en función de x.

$$\begin{array}{l|l}
5x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1 & x^3 + 2x^2 + 3 \\ \cline{2-2}
-5x^4 - 10x^3 \qquad - 15x & 5x - 11 \\ \cline{1-1}
\quad -11x^3 + 3x^2 - 13x & \\
\quad\ 11x^3 + 22x^2 \qquad + 33 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 25x^2 - 13x + 34 &
\end{array}$$

Cociente: $5x-11=(-11,\ 5,\ 0,\ ...)$
Resto: $25x^2-13x+34=(34,\ -13,\ 25,\ 0,\ ...)$

4. *Dados los polinomios*

$$M=(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 4,\ 0,\ ...)$$
$$P=(-2,\ 5,\ 4,\ 3,\ 1,\ 0,\ ...)$$

Efectuar:

1) $M+P$

2) $M-P$

3) $M\times P$

4) $M:P$

Solución

1) $M+P=(-1,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 4,\ 0,\ ...)$

2) $M-P=(3,\ -3,\ -1,\ 2,\ 7,\ 4,\ 0,\ ...)$

3) $M\times P=(-2,\ 1,\ 8,\ 16,\ 28,\ 63,\ 70,\ 45,\ 20,\ 4,\ 0,\ ...)$

4) $M:P \Rightarrow$ cociente $=(-4,\ 4,\ 0,\ ...)$
resto $=(-7,\ 30,\ -1,\ 1,\ 0,\ ...)$

5. *Comprobar que las raíces de la ecuación*

$$8x^3-14x^2+7x-1=0$$

están en progresión geométrica.

Solución

Por Ruffini

$$1)\quad \begin{array}{rrrr} 8 & -14 & 7 & -1 \\ & 8 & -6 & 1 \\ \hline 8 & -6 & 1 & 0 \end{array}$$

Una raíz es $x=1$

$$8x^2-6x+1=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{16}=\frac{6\pm 2}{16}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{cases}$$

— Las tres raíces son: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ están en progresión geométrica de razón $r=\frac{1}{2}$.

— También las raíces se pueden poner: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ que están en progresión geométrica de razón $r'=2$.

6. *Comprobar que las raíces de la ecuación*

$$x^3+6x^2+3x-10=0$$

están en progresión aritmética.

Solución

Por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 3 & -10 \\ 1) & & 1 & 7 & 10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & 0 \end{array}$$

Una raíz es $x=1$

$$x^2+7x+10=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{-7\pm 3}{2}=\begin{cases}-2\\ -5\end{cases}$$

— Las tres raíces son: 1, -2 y -5 que están en progresión aritmética de razón $r=-3$.

— También se pueden poner: -5, -2, 1 que están en progresión aritmética de razón $r'=3$.

7. *Dados los polinomios*

$$P=(\bar{1}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{0}, \dots)$$

$$Q=(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \dots)$$

cuyos coeficientes pertenecen a $Z/5$. *Hallar:*

1) $P+Q$

2) $P\times Q$

Solución

1)

$$P+Q=(\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{0}, \dots)$$

2) El producto lo hacemos componiendo la tabla

	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$$P\times Q=(\bar{1}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \dots)$$

8. *Dados los polinomios*

$$A=(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{0}, \dots)$$

$$B=(\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \dots)$$

cuyos coeficientes pertenecen a $Z/6$, *se pide:*

1) $A+B$

2) $A\times B$

Solución

1)

$$A+B=(\bar{3},\ \bar{2},\ \bar{4},\ \bar{4},\ \bar{5},\ \bar{0},\ \ldots)$$

2)

$$A\times B=(\bar{2},\ \bar{4},\ \bar{1},\ \bar{4},\ \bar{1},\ \bar{4},\ \bar{5},\ \bar{0},\ \ldots)$$

9. *Dados los polinomios*

$$P=x^3+2x^2-x+5$$
$$Q=2x^2-x+3$$

Determinar:

1) $P(2)$ *y* $Q(2)$

2) *¿Es* $P(2)+Q(2)=(P+Q)(2)$*?*

3) *¿Es* $P(2)\cdot Q(2)=PQ(2)$*?*

Solución

1)

$$P(2)=2^3+2\cdot 2^2-2+5=19$$
$$Q(2)=2\cdot 2^2-2+3=9$$

2)

$$P+Q=x^3+4x^2-2x+8$$
$$(P+Q)(2)=2^3+4\cdot 2^2-2\cdot 2+8=28$$

Se cumple que

$$P(2)+Q(2)=(P+Q)(2)$$
$$19+9=28$$

3)

$$P \cdot Q = 2x^5 + 3x^4 - x^3 + 17x^2 - 8x + 15$$

$$P \cdot Q(2) = 2 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^4 - 2^3 + 17 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 15 = 171$$

Se cumple que

$$P(2) \cdot Q(2) = PQ(2)$$

$$19 \cdot 9 = 171$$

10. *Dados los polinomios*

$$P = ax^2 + bx + c$$

$$Q = rx + s$$

Determinar si se cumple:

1) $P(m) + Q(m) = (P + Q)\ (m)$

2) $P(m) \cdot Q(m) = PQ(m)$

3) Comprobarlo para $m = -2$.

Solución

1)

$$P(m) = am^2 + bm + c$$

$$Q(m) = rm + s$$

$$P(m) + Q(m) = am^2 + (b + r)m + (c + s)$$

$$(P + Q)m = am^2 + (b + r)m + (c + s)$$

Se cumple que:

$$P(m) + Q(m) = (P + Q)(m)$$

2)

$$P \cdot Q = arx^3 + (br + as)x^2 + (cr + bs)x + cs$$

$$PQ(m) = arm^3 + (br + as)m^2 + (cr + bs)m + cs$$

$$P(m)Q(m) = arm^3 + (br + as)m^2 + (cr + bs)m + cs$$

Por tanto:

$$PQ(m) = P(m)Q(m)$$

3) Para $m = -2$

$$P(-2) = 4a - 2b + c$$

$$Q(-2) = -2r + s$$

$$(P+Q)(-2) = 4a - 2(b+r) + (c+s)$$

$$P \cdot Q(-2) = -8ar + 4(br + as) - 2(cr + bs) + cs$$

$$P(-2) + Q(-2) = (P+Q)(-2)$$

$$P(-2) \cdot Q(-2) = PQ(-2)$$

11. *Sin necesidad de realizar la división, calcular el resto en las siguientes divisiones:*

1) $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ *por* $x + 1$

2) $x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x - 6$ *por* $x - 1$

3) $x^6 - 3x^3 + 2x + 1$ *por* $x - 2$

Solución

1) Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 3 & -2 & 1 & -5 \\ -1) & & -4 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 4 & -1 & -1 & 2 & -7 \end{array} = \text{resto}$$

Cociente: $4x^3 - x^2 - x + 2$ y resto $= -7$.

2) Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 1) & & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & -5 \end{array} = \text{resto}$$

Cociente: $x^4-2x^3-2x^2+1$ y resto $=-5$.

3) Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2) & & 2 & 4 & 8 & 10 & 20 & 44 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & 10 & 22 & 45 = \text{resto} \end{array}$$

Cociente: $x^5+2x^4+4x^3+5x^2+10x+22$ y resto $=45$.

12. *Utilizando la Regla de Ruffini calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:*

1) $x^5+3x^4-x^3+8x^2-5x+6$ *por* $x-2$

2) $x^6+3x^4-x^2-x+8$ *por* $x+1$

3) $x^7+4x^5+3x^2-8x+1$ *por* $x-1$

Solución

1)

Cociente: $x^4+5x^3+9x^2+26x+47$ y resto $=100$

2)

Cociente: $x^5-x^4+4x^3-4x^2+3x-4$ y resto $=12$

3)

Cociente: $x^6+x^5+5x^4+5x^3+5x^2+8x$ y resto $=1$

13. *Determinar un polinomio de la forma*

$$P=x^2+ax+b$$

tal que sea divisible por $x-1$ *y que dé el mismo resto al dividirlo por* $x-2$ *y por* $x+1$.

Solución

Al ser divisible por $x-1$, el resto de la división es cero, luego

$$\begin{array}{r|ccc} & 1 & a & b \\ 1) & & 1 & a+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1=0 \end{array}$$

$$a+b+1=0$$

Si da el mismo resto al dividirlo por $x-2$ que por $x+1$, se verifica

$$P(2)=P(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2)\ \ =4+2a+b \\ P(-1)=1-a+b \end{array}\right\} 4+2a+b=1-a+b$$

Se tiene el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ 4+2a+b=1-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1 \text{ y } b=0$$

El polinomio pedido es: $P=x^2-x$

14. *Determinar los números naturales a y b para que el polinomio*

$$M=(a,\ b,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots)$$

sea divisible por $N=(5,\ -3,\ 1,\ 0,\ \ldots)$

Solución

$$\text{Si } N/M \Rightarrow \exists Q \mid M=N\cdot Q$$

Luego

$$(x^4+x^3+3x^2+bx+a)=(x^2-3x+5)(x^2+px+q)$$

operando e identificando coeficientes se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} p-3=1 \\ q-3p+5=3 \\ 5p-3q=b \\ 5q=a \end{array}\right\} \quad p=4,\ q=10,\ a=50 \text{ y } b=-10$$

Luego:

$$a=50 \text{ y } b=-10$$

15. *Efectuar la división de x^m-a^m por x^p-a^p y establecer la condición para que el resto sea nulo.*

Solución

$$\begin{array}{ll} x^m \qquad\qquad -a^m & \underline{|\, x^p-a^p} \\ & x^{m-p}+a^px^{m-2p}+\cdots+a^{k-1}x^{m-kp} \\ \underline{-x^m+a^px^{m-p}} & \\ \quad a^px^{m-p} & \\ \quad \underline{-a^px^{m-p}+a^{2p}x^{m-2p}} & \\ \qquad a^{2p}x^{m-2p} & \\ \qquad\qquad \underline{\cdots\cdots\cdots} & \\ \qquad\qquad a^{kp}x^{m-kp}-a^m & \end{array}$$

con $m-kp<p\leqslant m-(k-1)p \Rightarrow k\leqslant\dfrac{m}{p}<k+1$

El resto es nulo si

$$a^{kp}x^{m-kp}-a^m=0 \Rightarrow m=kp=p$$

El resto es nulo si y sólo si m es múltiplo de p

16. *Dados los polinomios*

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$$

$$Q(x) = x^2 + ax + 1$$

¿Qué valor tomará a para poder decir que P(x) es múltiplo de Q(x)?

Solución

Dividiendo P(x) entre Q(x) el resto ha de ser cero

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & +2x^2 & -2x-1 & & x^2+ax+1 \\
-x^3 & -ax^2 & -x & & x+(2-a) \\
\hline
 & (2-a)x^2 & -3x-1 & & \\
 & -(2-a)x^2 & -a(2-a)a-(2-a) & & \\
\hline
 & & [-3-a(2-a)]x-(3-a) & &
\end{array}$$

Se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} -3-a(2-a)=0 \\ -(3-a)=0 \end{array}\right\}$$

De la primera:

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ y } a = -1$$

que debe satisfacer la segunda ecuación, por tanto

$$a = 3$$

17. *Dados los polinomios*

$$P(x) = x^4 + mx^3 - 2x^2 + 7x + m$$

$$Q(x) = x^2 - 4x - m$$

1) Demostrar que se puede determinar m para que P(x) sea divisible por Q(x).

2) Hallar dicho valor de m y resolver la ecuación P(x) = 0 en tal caso.

Solución

1) Si P(x) es divisible por Q(x), al dividir P(x) entre P(x) el resto ha de ser cero, luego

$$\begin{array}{llllll|l}
x^4 & +mx^3 & -2x^2 & +7x & +m & & x^2-4x-m \\
-x^4 & +4x^3 & +mx^2 & & & & x^2+(m+4)x+(5m+14) \\
\hline
 & (m+4)x^3 & +(m-2)x^2 & +7x & & & \\
 & -(m+4)x^3 & +4(m+4)x^2 & +m(m+4)x & & & \\
\hline
 & & (5m+14)x^2 & +(m^2+4m+7)x & +m & & \\
 & & -(5m+14)x^2 & +(20m+56)x & +(5m^2+14m) & & \\
\hline
 & & & (m^2+24m+63)x & +(5m^2+15m) & &
\end{array}$$

El resto es cero, luego:

$$\left.\begin{array}{l} m^2+24m+63=0 \\ 5m^2+15m \quad\;\; =0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación sacaremos $m=0$ y $m=-3$ que al ser sustituidas en la primera dan:

— Para $m=0 \Rightarrow 63=0$

— Para $m=-3 \Rightarrow 9-72+63=0$

Por tanto $m=-3$ es el valor que satisface las dos ecuaciones.

2) $P(x)=0 \Rightarrow x^4-3x^3-2x^2+7x-3=0$

Por Ruffini se obtiene:

$$x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

18. *Dado el polinomio* $P(x)=x^4-x^3+x^2+ax+b$

Se pide:

1) Determinar a y b de modo que se anule para $x=1$ *y* *para* $x=2$

2) Resolver la ecuación $P(x)=0$ *sustituidos los valores de a y de b previamente.*

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=1-1+1+a+b=0 \\ P(2)=16-8+4+2a+b=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a+b=-1 \\ 2a+b=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-11 \text{ y } b=10$$

El polinomio es $P(x)=x^4-x^3+x^2-11x+10.$

2) $P(x)=0 \Rightarrow x^4-x^3+x^2-11x+10=0$

Por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 1 & -11 & 10 \\ 1) & & 1 & 0 & 1 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -10 & 0 \\ 2) & & 2 & 4 & 10 & \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 & \end{array}$$

$$x^2+2x+5=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\begin{cases} -1+2i \\ -1-2i \end{cases}$$

Las raíces son:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1+2i,\ x_4=-1-2i$$

19. *Hallar un polinomio P de tercer grado tal que sea divisible por* $Q=x^2+2x+1$ *y que al dividirlo por* $(x-2)$ *dé de resto 14 y al dividirlo por* $(x-1)$ *dé de resto 8, teniendo como raíz* -2.

Solución

El polinomio $P=ax^3+bx^2+cx+d$

Como $Q=x^2+2x+1=(x+1)^2 \Rightarrow x=-1$ es una raiz del polinomio P, por tanto

$$\left.\begin{array}{r} P(-1)=0 \\ P(-2)=0 \\ P(1)=8 \\ P(2)=14 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\frac{1}{6},\ b=1,\ c=\frac{25}{6},\ d=3$$

El polinomio pedido es:

$$P=-\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{25}{6}x+3$$

20. *Hallar con polinomio $P=rx^3+qx^2+px+2$ que sea múltiplo de $Q=x^2+bx+a$, siendo Q divisible por $x-1$ y por $x-2$. Se pide:*

1) Hallar el polinomio Q.

2) Hallar el polinomio P, sabiendo que tiene de raíces 1 y -1.

Solución

1) El polinomio $Q=x^2+bx+a$, al ser divisible por $x-1$ y por $x-2$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1)=0 \Rightarrow 1+b+a=0 \\ Q(2)=0 \Rightarrow 4+2b+a=0 \end{array}\right\} a=2 \text{ y } b=-3$$

$$Q=x^2-3x+2$$

2) Como P tiene de raíces 1 y -1

$$P(\ 1)=0 \Rightarrow \quad r+q+p+2=0$$

$$P(-1)=0 \Rightarrow -r+q-p+2=0$$

y como es múltiplo de Q tendrá como raíces el polinomio P las del polinomio Q, por tanto

$$P(2)=0 \Rightarrow 8r+4q+2p+2=0$$

Resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} r+q+p=-2 \\ -r+q-p=-2 \\ 8r+4q+2p=-2 \end{array}\right\} p=-1,\ r=1,\ q=-2$$

El polinomio pedido es:

$$P=x^3-2x^2-x+2$$

21. *Hallar un polinomio P de cuarto grado, sabiendo:*

a) Que es divisible por $Q=x^2+2x+1$

b) Que tiene por raíces 1 y −2

c) Que si lo dividimos por x dá de resto −2

Solución

Se tiene:

$$P=Q\cdot M=(x^2+2x+1)\cdot M$$

Al tener como raíces 1 y −2 y ser $(x^2+2x+1)=(x+1)^2$ resulta que:

$$M=a(x-1)(x+2)$$

Por tanto:

$$P=Q\cdot M=a(x^2+2x+1)(x-1)(x+2)=a(x^4+3x^3+x^2-3x-2)$$

Como $P(0)=-2 \Rightarrow a=1$

Siendo el polinomio $P=x^4+3x^3+x^2-3x-2$.

22. *Hallar aplicando el método de identificación de coeficientes la siguiente raíz cuadrada*

$$\sqrt{x^4-4x^3+10x^2-10x+8}$$

Solución

El primer término de la raíz cuadrada ha de ser de segundo grado y coeficiente 1 ó -1 ya que su cuadrado es x^4. Por tanto tomando x^2 la raíz es de la forma

$$x^2+ax+b$$

y el resto será un polinomio de orden inferior

$$px+q$$

Luego

$$x^4-4x^3+10x^2-10x+8=(x^2+ax+b)^2+(px+q)=$$
$$=x^4+a^2x^2+b^2+2ax^3+2bx^2+2abx+px+q=$$
$$=x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+(2ab+p)x+(b^2+q)$$

Identificando resulta:

$$\begin{array}{r} -4=2a \\ 10=a^2+2b \\ -10=2ab+p \\ 8=b^2+q \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a=-2, & b=3 \\ p=2, & q=-1 \end{cases}$$

La raíz es: $x^2+ax+b=x^2-2x+3$

El resto es: $px+q=2x-1$

Luego

$$x^4-4x^3+10x^2-10x+8=(x^2-2x+3)^2+(2x-1)$$

Tomando $-x^2+ax+b$ resultaría:

La raíz: $-x^2+2x-3$

El resto: $2x-1$

23. *Hallar aplicando el método de identificación de coeficientes la siguiente raíz cuadrada*

$$\sqrt{x^6-6x^5+13x^4-18x^3+22x^2-12x+9}$$

Solución

$$x^6-6x^5+13x^4-18x^3+22x^2-12x+9=$$

$$=(x^3+ax^2+bx+c)^2+(px^2+qx+r)$$

Identificando

$$\left.\begin{array}{r} 2a=-6 \\ 2b+a^2=13 \\ 2(c+ab)=-18 \\ 2ac+b^2+p=22 \\ 2bc+q=-12 \\ c^2+r=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-3, \ b=2, \ c=-3 \\ p=0, \ q=0, \ r=0 \end{cases}$$

Se trata de una raíz cuadrada exacta cuyo resultado es

$$x^3-3x^2+2x-3$$

Al tomar -1 como coeficiente de x^3 la raíz cuadrada también es exacta y de valor

$$-x^3+3x^2-2x+3$$

24. *Dados los polinomios*

$$P(x)=5x^4+4x^3+5x^2+6x+7$$
$$Q(x)=ax^2+bx+c$$

Hallar: $P(x):Q(x)$ sabiendo que:

a = distancia entre los puntos $(1, 5)$ y $(-2, 1)$

b = el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

y que al dividir $Q(x)$ por $(x+2)$ da de resto 12.

Solución

$$a=\sqrt{(1+2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$b=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12+4-6-3+16+6=5$$

$$Q(x)=5x^2+5x+c$$

$$Q(-2)=20-10+c=12 \Rightarrow c=2$$

Por tanto: $Q(x)=5x^2+5x+2$

Dividendo $P(x)$ por $Q(x)$

$$\begin{array}{l|l}
5x^4+4x^3+5x^2+\ 6x+\ 7 & 5x^2+5x+2 \\ \cline{2-2}
-5x^4-5x^3-2x^2 & x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5} \\ \cline{1-1}
\quad -\ x^3+3x^2+\ 6x & \\
\quad\ \ x^3+\ x^2+\frac{2}{5}x & \\ \cline{1-1}
\qquad 4x^2+\frac{32}{5}x+\ 7 & \\
\qquad -4x^2-\frac{20}{5}x-\ \frac{8}{5} & \\ \hline
\qquad\qquad \frac{12}{5}x+\frac{27}{5} &
\end{array}$$

Cociente: $x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$ y Resto: $\frac{12}{5}x+\frac{27}{5}$

25. *Determinar a y b en el polinomio*

$$P=x^4-8x^3+ax^2+bx+1$$

para que éste sea un cuadrado perfecto.

Solución

Tomamos 1 como coeficiente de x^2:

$$(x^4-8x^3+ax^2+bx+1)=(x^2+px+q)^2=$$
$$=x^4+p^2x^2+q^2+2px^3+2qx^2+2pqx=$$
$$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

Identificando

$$\left.\begin{array}{r} -8=2p \\ a=p^2+2q \\ b=2pq \\ 1=q^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} \text{1.ª solución} & \text{2.ª solución} \\ p=-4 & a=14 \\ a=16+2=18 & b=8 \\ b=-8 & p=-4 \\ q=1 & q=-1 \end{array}$$

Las soluciones son:

$$\sqrt{x^4-8x^3+18x^2-8x+1}=x^2-4x+1$$
$$\sqrt{x^4-8x^3+14x^2+8x+1}=x^2-4x-1$$

Tomando -1 como coeficiente de x^2 resultaría

$$\sqrt{x^4-8x^3+18x^2-8x+1}=-x^2+4x-1$$
$$\sqrt{x^4-8x^3+14x^2+8x+1}=-x^2+4x+1$$

26. *Determinar un polinomio $P(x)$ de tercer grado divisible por $x+1$ y tal que al dividirlo por $x-2$, $x-3$ y $x-4$ los restos sean iguales.*

Solución

$P(x)$ es de tercer grado que por ser divisible por $(x+1)$ es de la forma:

$$P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$$
$$P(1)=P(2)=P(3)$$
$$P(2)=(2+1)(\ 4a+2b+c)=3(\ 4a+2b+c)$$
$$P(3)=(3+1)(\ 9a+3b+c)=4(\ 9a+3b+c)$$

$$P(4)=(4+1)(16a+4b+c)=5(16a+4b+c)$$

Igualando

$$P(2)=P(3) \quad y \quad P(3)=P(4)$$

$$3(4a+2b+c)=4(9a+3b+c)$$

$$4(9a+3b+c)=5(16a+4b+c)$$

Operando

$$12a+6b+3c=36a+12b+4c$$

$$36a+12b+4c=80a+20b+5c$$

$$\left.\begin{array}{l}24a+6b+c=0\\44a+8b+c=0\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema

$$b=-10a$$

$$c=36a$$

El polinomio es:

$$P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)=(x+1)(ax^2-10ax+36a)=$$

$$=a(x+1)(x^2-10x+36)$$

27. *Encontrar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por x^2-1 y que al dividirlo por $(x+2)$, $(x-2)$ y $(x-3)$ se obtengan en los tres casos restos iguales.*

Solución

$$P(x)=(x^2-1)(ax^2+bx+c)$$

$$P(-2)=(4-1)(4a-2b+c)=3(4a-2b+c)$$

$$P(2)=(4-1)(4a+2b+c)=3(4a+2b+c)$$

$$P(3)=(9-1)(9a+3b+c)=8(9a+3b+c)$$

Haciendo

$$\left.\begin{array}{l} P(-2)=P(2) \\ P(2)\ \ \ \ =P(3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3(4a-2b+c)=3(4a+2b+c) \\ 3(4a+2b+c)=8(9a+3b+c) \end{array}$$

resulta

$$\left.\begin{array}{r} 4a-2b+\ c=\ 4a+\ 2b+\ c \\ 12a+6b+3c=72a+24b+8c \end{array}\right\} \Rightarrow b=0,\ c=-12a$$

Por tanto

$$P(x)=(x^2-1)(ax^2-12a)=a(x^2-1)(x^2-12)$$

28. *Al dividir un polinomio por $x+1$ se obtiene de resto 5. Si el mismo polinomio se divide por $(x-1)$, el resto es -1 y al dividirlo por $(x-2)$ el resto que se obtiene también es -1. ¿Qué resto se obtendrá al dividir el polinomio en cuestión por (x^2-1) $(x-2)$?*

Solución

$$P(x)=C_1(x)(x+1)+5$$
$$P(x)=C_2(x)(x-1)+(-1)$$
$$P(x)=C_3(x)(x-2)+(-1)$$

Si el polinomio se divide por $(x^2-1)(x-2)$ que es de grado 3, quiere decir que $R(x)$ es de grado 2 como máximo, es decir

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

Tendremos:

$$P(x)=C(x)(x^2-1)(x-2)+(ax^2+bx+c)$$

Por los datos anteriores

$$\left.\begin{array}{l} P(-1)=C(-1)(1-1)(-1-2)+(a-b+c)=5 \\ P(1)\ \ \ =C(1)(1-1)(1-2)+(a+b+c)=-1 \\ P(2)=C(2)(4-1)(2-2)+(4a+2b+c)=-1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a-b+c&=5\\ a+b+c&=-1\\ 4a+2b+c&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo:

$$a=1,\ b=-3\ \text{y}\ c=1$$

Luego

$$R(x)=ax^2+bx+c=x^2-3x+1$$

29. *Hallar todos los valores de a, b y c para los cuales el polinomio en x*

$$a(x^2-2x+1)+b(x^2-3x+5)+c(5x^2-11x+9)$$

Sea el polinomio cero.

Solución

$$a(x^2-2x+1)+b(x^2-3x+5)+c(5x^2-11x+9)=0$$

Operando:

$$ax^2-2ax+a+bx^2-3bx+5b+5cx^2-11cx+9c=0$$

$$(a+b+5c)x^2+(-2a-3b-11c)x+(a+5b+9c)=0$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} a+b+5c&=0\\ -2a-3b-11c&=0\\ a+5b+9c&=0 \end{aligned}\right\}$$

resulta un sistema homogéneo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5\\ -2 & -3 & -11\\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}=-27-11-50+15+55+18=0$$

Como el determinado es nulo, hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} a+\ b=-5c \\ a+5b=-9c \end{array}\right\} \Rightarrow a=-4\lambda, \quad b=-\lambda, \quad c=\lambda$$

Para cada valor de λ tenemos un valor para a, b y c.

30. *Hallar qué valores han de tomar los coeficientes a, b y c para que las tres raíces del polinomio*

$$x^3-ax^2+bx+c=0$$

sean precisamente a, b y c distintas de cero.

Solución

Se tiene:

$$x^3-ax^2+bx+c=(x-a)(x-b)(x-c)$$

Identificando coeficientes:

$$x^3-ax^2+bx+c=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} a=a+b+c \\ b=ab+ac+bc \\ c=-abc \end{array}\right\} \Rightarrow a=1, \quad b=-1, \quad c=1$$

Resulta el polinomio:

$$x^3-x^2-x+1$$

31. *Determinar el m.c.d. de los polinomios*

$$A(x)=x^{99}+1$$
$$B(x)=x^{45}+1$$

Solución

Aplicando el algoritmo de Euclides:

$$
\begin{array}{l|l|r}
 & x^{54}-x^{9} & x^{36}-x^{27}+x^{18}-x^{9}+1 \\
\hline
x^{99} \qquad\quad +1 & x^{45}+1 & x^{9}+1 \\
\hline
-x^{99}-x^{34} & -x^{45}-x^{36} & \\
\quad -x^{54} & \quad -x^{36}+1 & \\
\quad\ \ x^{54}+x^{9} & \quad\ \ x^{36}+x^{27} & \\
\qquad\quad x^{9}+1 & \qquad\quad x^{27}+1 & \\
 & \qquad\ \ -x^{27}-x^{18} & \\
 & \qquad\qquad -x^{18}+1 & \\
 & \qquad\qquad\ \ x^{18}+x^{9} & \\
 & \qquad\qquad\qquad x^{9}+1 & \\
 & \qquad\qquad\quad\ \ -x^{9}+1 & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \\
\end{array}
$$

$$\text{m.c.d. } [A(x),\ B(x)] = x^{9}+1$$

32. *Dados los polinomios*

$$A(x) = x^{4} - 2x^{3} - 14x^{2} - 2x - 15$$

$$B(x) = x^{2} - 2x - 15$$

Calcular:

1) *m.c.d.* $[A(x),\ B(x)] = D(x)$

2) *Resolver* $D(x) = 0$

3) *Resolver* $A(x) = 0$

Solución

1) Dividiendo A(x) entre B(x) nos resulta como cociente

x^2+1 y resto cero, luego

$$\text{m.c.d.}[A(x),\ B(x)]=D(x)=x^2-2x-15$$

2)

$$D(x)=0 \Rightarrow x_1=5 \quad y \quad x_2=-3$$

3)

$$A(x)=0 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-3,\ x_3=i \ y \ x_4=-i$$

33. *Descomponer la fracción*

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}$$

en suma de tres fracciones de denominadores lineales o fracciones simples.

Solución

Hacemos $x^3+2x^2-x-2=0$ y, por Ruffini, obtenemos:

$$x_1=1, \quad x_2=-1 \quad y \quad x_3=-2$$

Luego

$$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$$

Se tiene que cumplir:

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Los numeradores son iguales, por tanto,

$$5x+1=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x-2)+c(x-1)(x+1)$$

— Para $x=1 \Rightarrow 6=6A \Rightarrow A=1$

— Para $x=-1 \Rightarrow -4=-2B \Rightarrow B=2$

— Para $x=-2 \Rightarrow -9=3C \Rightarrow C=-3$

de donde

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}$$

34. *Sea Q el conjunto de los números racionales y A el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en Q. Se define en A una relación binaria R de la siguiente forma:*

Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, se dice que satisfacen la relación R si y sólo si

$$P(x)-Q(x) \text{ es múltiplo de } 2x+1$$

Se pide:

1) Demostrar que R es una relación de equivalencia.

2) Se define la aplicación f de A en Q que hace corresponder al polinomio $M(x)$ el resto de su división por $2x+1$. Si tanto en A como en Q se consideran las operaciones ordinarias suma y producto, averiguar si f es homomorfismo e isomorfismo demostrando la respuesta.

Solución

1) Se trata de una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades:

— Reflexiva: $P(x)-P(x)=0=\dot{\overline{2x+1}}$

— Simétrica: Si $P(x)-Q(x)=\dot{\overline{2x+1}}$, entonces también $Q(x)-P(x)=\dot{\overline{2x+1}}$

— Transitiva: Si $P(x)-Q(x)=\dot{\overline{2x+1}}$ y

sumando m. a. m. $\dfrac{Q(x)-R(x)=\dot{\overline{2x+1}}}{P(x)-R(x)=2(\dot{\overline{2x+1}})}=\dot{\overline{2x+1}}$

2) Se define la aplicación:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow Q \\ P(x) &\longrightarrow a \\ Q(x) &\longrightarrow b \end{aligned}$$

Se ha de cumplir

$$f[P(x)+Q(x)]=f[P(x)]+f[Q(x)]$$

$$P(x)=M(x)\cdot(2x+1)+a$$

$$Q(x)=N(x)\cdot(2x+1)+b$$

$$\overline{P(x)+Q(x)=[M(x)+N(x)](2x+1)+(a+b)}$$

Por tanto,

$$f[P(x)+Q(x)]=a+b=f[P(x)]+f[Q(x)]$$

es homomorfismo pero no isomorfismo, pues dos polinomios distintos tienen la misma imagen, por ejemplo:

$$2x^2+x+1=x(2x+1)+1$$

$$2x^3+x^2+1=x^2(2x+1)+1$$

La aplicación f no es biyectiva.

6. Transformaciones Ortogonales. Homotecias y Semejanzas.

CONCEPTOS TEORICOS

— **Transformaciones ortogonales:** Son aquellas transformaciones que vienen definidas por una matriz ortogonal.

— **Matriz ortogonal:** Una matriz A es ortogonal si su traspuesta es igual a su inversa.

— **Homotecia:** H(0, k) es una transformación geométrica que hace corresponder a cada punto $\underline{P}$ del plano otro punto P' del mismo plano, tal que: $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.

— **Ecuaciones de una Homotecia H[(a, b), k]**

$$x' - a = k(x - a)$$

$$y' - b = k(y - b)$$

— **Semejanza:** Se llama semejanza a una transformación puntual en la que a cada par de puntos $\underline{A}$ y $\underline{B}$ se asocia los puntos A' y B' que cumplen la condición: $\overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB}$, siendo r la razón de semejanza.

— **Semejanza directa:** La transformación compuesta de una homotecia y de un giro, se llama semejanza directa.

— **Semejanza inversa:** La transformación compuesta de una homotecia y de una simetría, se llama semejanza inversa.

— **Matriz de una semejanza directa:**

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix}$$

resultando: $A^2+B^2=r^2$, siendo r la razón de semejanza.

— **Matriz de una semejanza inversa:**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & -ra \end{pmatrix}$$

resultando: $A^2+B^2=r^2$, siendo r la razón de semejanza.

PROBLEMAS

1. *Probar que si la matriz* $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *es ortogonal, se verifica:*

$$a^2+c^2=b^2+d^2=1 \quad y \quad ab+cd=0$$

Solución

Decimos que una matriz es ortogonal si su traspuesta es igual a su inversa, es decir:

$$M'=M^{-1}$$

Por tanto: $MM'=I$

$$MM'=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde resulta:

$$a^2+c^2=1$$
$$b^2+d^2=1$$
$$ab+cd=0$$

2. *Una matriz ortogonal, ¿puede ser singular?*

Solución

Sea M una matriz ortogonal

$$MM' = I$$

Tomando determinantes

$$|MM'| = |M||M'| = |I|$$

$$\text{Como } |M| = |M'| \text{ resulta } |M|^2 = 1 \Rightarrow |M| = \pm 1$$

Al ser $|M| \neq 0$ la matriz ortogonal es no singular ya que su determinante siempre es distinto de cero.

3. *Una aplicación lineal de V en V viene dada por una matriz ortogonal A. Si en V se efectúa un cambio de base de matriz C, la nueva matriz de la aplicación lineal es $\overline{A} = CAC^{-1}$. ¿Será $\overline{A}$ también ortogonal?*

Solución

Para que $\overline{A}$ fuera ortogonal se ha de cumplir

$$\overline{A}\,\overline{A}' = I$$

Sustituyendo:

$$\overline{A}\,\overline{A}' = (CAC^{-1})(CAC^{-1})' = CAC^{-1}(C^{-1})'A'C'$$

que sólo resultará la matriz identidad caso de ser C ortogonal, condición que no se exige.

Por tanto $\overline{A}$ no es ortogonal.

4. *Dadas las matrices*

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$$

indicar si son o no matrices ortogonales.

Solución

— La matriz A es ortogonal pues

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

— La matriz B no es ortogonal pues

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{3}{36}+\frac{6}{9}=\frac{27}{36}\neq 1$$

5. *Sabiendo que una matriz ortogonal T es*

$$T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

siendo: $a^2+c^2=b^2+d^2=1$ *y* $ab+cd=0$.

¿De cuántas formas puede expresarse?

Solución

Sólo hay dos formas

$$M=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad y \quad N=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

ya que en la primera ponemos $c=-b$ y $d=a$, cumpliéndose:

$$a^2+b^2=(-b)^2+a^2=1 \quad \text{y} \quad ab+cd=ab+(-b)a=0$$

— En la segunda hemos puesto:

$$c=b \quad \text{y} \quad d=-a$$

cumpliéndose: $a^2+b^2=b^2+(-a)^2=1$ y $ab+cd=ab+b(-a)=0$.

El resto de matrices ortogonales adopta una de estas dos formas expuestas.

6. *Razonar si la suma de dos transformaciones ortogonales es o no una transformación ortogonal.*

Solución

Pueden ocurrir tres casos:

1) Que sean las transformaciones ortogonales de matrices

$$T_1=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_2=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

cumpliéndose $a^2+b^2=1$; $c^2+d^2=1$

$$T_1+T_2=\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$

Se ha de cumplir: $(a+c)^2+(b+d)^2=1$, pero desarrollando

$$(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=$$

$$(a^2+c^2)+2ac+(b^2+d^2)+2bd=1+2ac+1+2bd\neq 1$$

No es una transformación ortogonal.

2) Que sean las transformaciones ortogonales de matrices

$$M_1=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $a^2+b^2=1$; $c^2+d^2=1$

$$M_1+M_2=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & -(a+c) \end{pmatrix}$$

Se ha de cumplir: $(a+c)^2+(b+d)^2=1$, cosa que no ocurre como hemos demostrado en el caso anterior, por tanto no es una transformación ortogonal.

3) Que sean las transformaciones ortogonales de matrices:

$$T=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $a^2+b^2=1$; $c^2+d^2=1$

$$T+M=\begin{pmatrix} a+c & -b+d \\ b+d & a-c \end{pmatrix}$$

Que no resulta una matriz ni de la forma de M ni de la forma de T, por tanto no es una transformación ortogonal.

7. *Razonar si el producto de dos transformaciones ortogonales es o no una transformación ortogonal.*

Solución

Pueden ocurrir tres casos:

1) Que sean las transformaciones ortogonales de matrices:

$$T_1=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_2=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $a^2+b^2=1$; $c^2+d^2=1$

$$T_1 \cdot T_2=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

Se ha de cumplir: $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=1$.

En efecto:

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd+b^2c^2+a^2d^2+$$
$$+2bcad=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1 \cdot 1=1$$

Es una transformación ortogonal.

2) Que sean las transformaciones ortogonales de matrices

$$M_1=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad y \quad M_2=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $a^2+b^2=1$; $c^2+d^2=1$

$$M_1 \cdot M_2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+bd & ad-bc \\ bc-ad & bd+ac \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ac+bd & -(bc-ad) \\ bc-ad & bd+ac \end{pmatrix}$$

Se ha de cumplir: $(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=1$.

En efecto:

$$(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=a^2c^2+b^2d^2+2acbd+b^2c^2+a^2d^2-2bcad=$$
$$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=$$
$$=1\cdot 1=1$$

Se trata de una transformación ortogonal.

3) Que sean las transformaciones ortogonales de matrices

$$T=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad y \quad M=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $a^2+b^2=1$; $c^2+d^2=1$

$$T \cdot M=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ bc+ad & -(ac-bd) \end{pmatrix}$$

Se ha de cumplir: $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=1$ cosa que demostramos en el primer apartado.

Es una transformación ortogonal

Por tanto el producto de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal.

8. *Sabiendo que la matriz correspondiente a un giro de centro el origen de coordenadas es*

$$G=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad con\ a^2+b^2=1$$

que por tanto es una transformación ortogonal, ¿qué estructura tendrá el producido de giros concéntricos?

Solución

Comprobamos las propiedades del grupo:

— *Operación interna:* El producto de dos giros es otro giro

$$G_1=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad y \quad G_2=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

con $a^2+b^2=1$ y $c^2+d^2=1$

$$G_1 \cdot G_2=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=1$.

— *Propiedad asociativa:* $G_1(G_2 \cdot G_3)=(G_1 \cdot G_2) \cdot G_3$

— *Elemento neutro* es la identidad

$$G \cdot I=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=G$$

— *Elemento inverso* de G es G′ pues:

$$G \cdot G'=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— *Es conmutativa:* $G_1 \cdot G_2=G_2 \cdot G_1$

$$G_1 \cdot G_2=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=G_2 \cdot G_1$$

El conjunto de los giros del mismo centro respecto al producto es Grupo Abeliano.

9. *Sabiendo que la matriz correspondiente a una simetría cuyo eje* *pasa por el origen de coordenadas es de la forma:*

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad con\ a^2+b^2=1$$

y que por tanto es una transformación ortogonal, ¿qué estructura tendrá el producto de simetrías que pasan por el origen de coordenadas?

Solución

Comprobamos las propiedades del grupo:

— *Operanción interna:*

$$S_1 \cdot S_2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+bd & ad-bc \\ bc-ad & bd+ac \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} ac+bd & -(bc-ad) \\ bc-ad & bd+ac \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$$

cumpliéndose: $p^2+q^2=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=1$.

El producto de dos simetrías cuyos ejes pasan por el origen de coordenadas es un giro de centro el origen de coordenadas, ya que la matriz obtenida es la de un giro.

La operación no es interna, por tanto no es Grupo

10. *Sabiendo que la matriz correspondiente a una simetría cuyo eje pasa por el origen de coordenadas es de la forma:*

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad con\ a^2+b^2=1$$

y que la matriz correspondiente a un giro de centro el origen de coordenadas es de la forma

$$G=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \qquad con\ c^2+d^2=1$$

Se pide:

1) ¿Qué resulta al aplicar primero giro y después simetría?

2) ¿Qué resulta al aplicar primero simetría y después giro?

3) ¿Es conmutativo el producto de giro y simetría?

Solución

1) Aplicando primero giro y después simetría

$$G \cdot S=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ da+bc & db-ac \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ da+bc & -(ac-db) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \qquad \text{con } p^2+q^2=1$$

El resultado es una simetría.

2) Aplicando primero simetría y después giro

$$S \cdot G=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+bd & -ad+bc \\ bc-ad & -bd-ac \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix}$$

con: $m^2+n^2=1$.

El resultado es una simetría

3)

$$G \cdot S \neq S \cdot G$$

No es conmutativo el producto.

11. *Sea T una transformación ortogonal tal que a un punto P (x, y) le hace corresponder el punto P′ (x′, y′) mediante las ecuaciones*

$$x' = -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$$

$$y' = \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y$$

Se pide:

1) Determinar las ecuaciones de la transformación inversa T^{-1}.

2) ¿Se verifica que $T \cdot T = I$?

3) Hallar el conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyos transformados sean $P'(-x, -y)$.

4) Comprobar que se verifica:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Solución

1) Como se trata de una matriz ortogonal

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = T' = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

por tanto: $x = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$

$y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$

2)

$$T \cdot T = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3) Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=-x \\ y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=0 \\ 3x+9y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-3y$$

Todos los puntos situados en esta recta.

4)

$$x'^2+y'^2=\left(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right)^2+\left(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y\right)^2=\frac{16}{25}x^2+\frac{9}{25}y^2-$$
$$-\frac{24}{25}xy+\frac{9}{25}y^2+\frac{24}{25}xy=x^2+y^2$$

12. *En una homotecia que tiene por centro el origen de coordenadas, el homólogo del punto $A(4, 4)$ está en la recta $x+2y+6=0$.*

Hallar:

1) La razón de homotecia.

2) El homólogo del punto $B(6, 2)$.

3) El homólogo del centro.

4) La recta homóloga de $3x+2y=6$

5) La circunferencia homóloga de la de centro $(4, 3)$ y radio 2.

Solución

1) Como el centro de homotecia y los puntos homólogos están alineados las coordenadas del homólogo A' se obtienen como punto de intersección de la recta que pasa por 0 y A con la dada $x+2y+6=0$.

— Recta que pasa por 0 y A es

$$y-4=\frac{0-4}{0-4}(x-4) \Rightarrow y=x$$

Luego

$$\left.\begin{array}{r} y-x=0 \\ x+2y+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2,\ y=-2 \Rightarrow A'(-2,\ -2)$$

Las ecuaciones de la homotecia son:

$$\left.\begin{array}{r} -2=k\cdot 4 \\ -2=k\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow k=-\frac{1}{2} \text{ (razón de homotecia)}$$

y las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x'=-\frac{1}{2}x \\ y'=-\frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

2) El homólogo de B(6, 2) es

$$\left.\begin{array}{r} x'=-\frac{1}{2}\cdot 6=-3 \\ y'=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow B'(-3,\ -1)$$

3) El homólogo del centro 0(0, 0) es

$$\left.\begin{array}{r} x'=-\frac{1}{2}\cdot 0=0 \\ y'=-\frac{1}{2}\cdot 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0'(0,\ 0)$$

4) La recta homóloga de $3x+2y=6$

Como $\begin{array}{l} y=-2y' \\ x=-2x' \end{array}$

$$3(-2x')+2(-2y')=6$$

$-6x'-4y'=6$ y quitando comillas $\Rightarrow 3x+2y+3=0$

5) La circunferencia homóloga de

$$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$$

es: $$(-2x'-4)^2+(-2y'-3)^2=2^2$$

quitando comillas y simplificando:

$$(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$$

13. *Dada la circunferencia de centro C(2, 0) y radio 1, se pide, encontrar la ecuación de la circunferencia homotética de la anterior y de centro el punto de abscisa 6, siendo el centro de la homotecia el origen de coordenadas.*

Solución

La homotecia H(0, k) tiene de ecuaciones

$$x'=kx$$
$$y'=ky$$

Como el transformado de C(2, 0) es C'(6, 0) resulta

$$6=k\cdot 2 \Rightarrow k=3$$

La homotecia es H(0, 3) de ecuaciones

$$x'=3x$$
$$y'=3y$$

La circunferencia $(x-2)^2+(y-0)^2=1$ se transforma en

$$\left(\frac{x'}{3}-2\right)^2+\left(\frac{y'}{3}-0\right)^2=1$$

quitando comillas

$$(x-6)^2+y^2=3^2$$

14. *El punto A (2, 3) se transforma mediante una traslación en el B (4, 6). El punto B se transforma mediante el giro G (0, φ) en C (−6, 4). Al punto C le aplicamos una simetría central de centro 0 y obtenemos el punto D. A este punto D le aplicamos la homotecia de centro 0 y razón k transformándose en E (3, −2).*

Se pide:

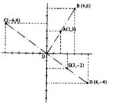
1) Representar gráficamente y determinar la mediatriz del segmento AE.

2) Las ecuaciones de todos los movimientos efectuados.

3) Las coordenadas del punto D.

Solución

1) Gráficamente



La pendiente de la recta que pasa por A(2, 3) y E(3, −2) es

$$m = \frac{-2-3}{3-2} = \frac{-5}{1} = -5$$

La pendiente opuesta e inversa es $m' = \frac{1}{5}$

El punto medio de AE es $M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right)$

La ecuación de la recta pedida es

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x - 5y = 0$$

2)

— *Traslación*

$$\left.\begin{array}{l} x'=x+a \\ y'=y+b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4=2+a \\ 6=3+b \end{array}\right\} \Rightarrow a=2 \text{ y } b=3$$

luego
$$\begin{array}{l} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{array}$$

— *Giro*

$$\left.\begin{array}{l} x'=x\cos\varphi-y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y'=x\,\mathrm{sen}\,\varphi+y\cos\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{r} -6=4\cos\varphi-6\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ 4=4\,\mathrm{sen}\,\varphi+6\cos\varphi \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,\varphi=1 \\ \cos\varphi=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi=90^\circ \quad \text{luego} \left\{\begin{array}{l} x'=-y \\ y'=x \end{array}\right.$$

— *Simetría central*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x'+x}{2}=0 \\ \dfrac{y'+y}{2}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=-x \\ y'=-y \end{array}\right.$$

— *Homotecia*

$$\left.\begin{array}{l} x'=kx \\ y'=ky \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3=k\cdot 6 \\ -2=k\cdot(-4) \end{array}\right. \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

luego
$$\begin{array}{l} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=\frac{1}{2}y \end{array}$$

3) Como D es el simétrico de C mediante la simetría central

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-6+x'}{2}=0 \\ \dfrac{4+y'}{2}=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x'=6 \\ y'=-4 \end{array} \Rightarrow D(6,\ -4)$$

15. *Se considera la traslación $T_{(2,\ 3)}$, el grupo $G[(2,\ 5),\ 90°]$, la simetría axial de eje $x=y$, la homotecia de centro $(-3,\ -4)$ y razón 3. Se pide:*

1) ¿Cuál es el transformado del punto $A(1,\ 2)$ al aplicarle: $T \times G \times S \times H$.

2) Considerando la recta $3x+2y=6$, hallar la transformada de ella al aplicarle: $S \times H \times G \times T$.

Solución

Ecuaciones:

a) *Giro:* $x' = -y+7$, $y' = x+3$

b) *Simetría:* $x' = y$, $y' = x$

c) *Traslación:* $x' = x+2$, $y' = y+3$

d) *Homotecia:* $x' = 3x+6$, $y' = 3y+8$

1) El transformado del punto A(1, 2) se obtiene así:

$$A(1,\ 2) \xrightarrow{T} A'(3,\ 5) \xrightarrow{G} A''(2,\ 6) \xrightarrow{S} A'''(6,\ 2) \xrightarrow{H} A^{IV}(24,\ 14)$$

2) Dos puntos de la recta son P(2, 0) y Q(0, 3)

$$P(2,\ 0) \xrightarrow{S} P'(0,\ 2) \xrightarrow{H} P''(6,\ 14) \xrightarrow{G} P'''(-7,\ 9) \xrightarrow{T} P^{IV}(-5,\ 12)$$

$$Q(0,\ 3) \xrightarrow{S} Q'(3,\ 0) \xrightarrow{H} Q''(15,\ 8) \xrightarrow{G} Q'''(-1,\ 18) \xrightarrow{T} Q^{IV}(1,\ 21)$$

La ecuación de la recta que pasa por P^{IV} y Q^{IV} es:

$$y-21 = \frac{12-21}{-5-1}(x-1) \Rightarrow 3x-2y+39=0$$

16. *En una homotecia que tiene por centro el origen de coordenadas, el homólogo del A (2, 1) está en la recta $x+3y=15$. Hallar las coordenadas del punto B' homólogo del B (3, −1) y calcular la razón de homotecia.*

Solución

La recta que pasa por O(0, 0) y A(2, 1) es

$$y-0=\frac{1-0}{2-0}(x-0) \Rightarrow x-2y=0$$

El homólogo de A está en el punto de intersección de las rectas

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=0 \\ x+3y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow A'(6,\ 3)$$

Las ecuaciones de la homotecia de centro 0 y razón k son

$$\left\{\begin{array}{l} x'=kx \\ y'=ky \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6=k\cdot 2 \\ 3=k\cdot 1 \end{array}\right. \Rightarrow k=3$$

El homólogo de B(3, −1) es

$$\begin{array}{l} x'=3\cdot 3=9 \\ y'=3\cdot(-1)=-3 \end{array} \Rightarrow B'(9,\ -3)$$

17. *En la homotecia plana cuyo centro en el origen de coordenadas y los puntos A (0, 2) y A' (0, 4) homólogos, hallar:*

1) El homólogo de P (3, 0) y la recta homóloga de

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

2) La ecuación de la circunferencia homóloga de la de centro C (1, 1) y radio 5.

Solución

1) Las ecuaciones de la homotecia son:

$$\left.\begin{array}{l}x'=kx\\ y'=ky\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}0=k\cdot 0\\ 4=k\cdot 2\end{array}\right\} \Rightarrow k=2$$

La homotecia de H(0, 2)

— El punto homólogo de P(3, 0) es:

$$\begin{array}{l}x'=2x=2\cdot 3=6\\ y'=2y=2\cdot 0=0\end{array} \Rightarrow P'(6,\ 0)$$

La recta homóloga de $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ es:

$$\frac{\frac{x'}{2}}{3}+\frac{\frac{y'}{2}}{2}=1 \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1 \text{ (quitando comillas)}$$

2) La ecuación de la circunferencia homóloga de la de centro C(1, 1) y radio 5 es:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=5^2$$

$$\left(\frac{x'}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y'}{2}-1\right)^2=5^2$$

quitando comillas:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=10^2$$

18. *Dada la circunferencia de ecuación*

$$x^2+y^2-6x=0$$

Se pide:

1) Ecuación de la figura homotética en una homotecia cuyo centro es el origen de coordenadas y razón $-\frac{5}{3}$.

2) Coordenadas del centro de la homotecia de razón positiva que transforma la circunferencia obtenida en la dada.

Solución

1) Las ecuaciones de la homotecia $H\left(0,\ -\frac{5}{3}\right)$ son

$$x' = -\frac{5}{3}x$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

La circunferencia $x^2 + y^2 - 6x = 0$ se transforma en:

$$\left(-\frac{3}{5}x'\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}y'\right)^2 - 6\left(-\frac{3}{5}x'\right) = 0$$

quitando comillas y simplificando,

$$x^2 + y^2 + 10x = 0$$

2) Ahora la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x = 0$ de centro $(-5,\ 0)$ y radio 5 se transforma en la $x^2 + y^2 - 6x = 0$ de centro $(3,\ 0)$ y radio 3.

La razón de homotecia nos la da la razón de los radios, luego

$$k' = \frac{3}{5}$$

El centro de la homotecia lo calculamos así:

$$H\left[(a,\ b),\ \frac{3}{5}\right] \qquad A(-5,\ 0) \xrightarrow{H} A'(3,\ 0)$$

$$\left.\begin{aligned} x' - a &= \frac{3}{5}(x - a) \\ y' - b &= \frac{3}{5}(y - b) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3 - a &= \frac{3}{5}(-5 - a) \\ 0 - b &= \frac{3}{5}(0 - b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 15 \ \text{ y } \ b = 0$$

La homotecia pedida es:

$$H\left[(15,\ 0),\ \frac{3}{5}\right]$$

19. *A la circunferencia C de ecuación*

$$x^2+y^2-10x+21=0$$

se le aplica un giro de 60° alrededor del origen de coordenadas, transformándose así en la circunferencia C'. A ésta se le aplica una homotecia H de razón 2, cuyo centro está en el centro de la primera circunferencia, transformándose C' en la circunferencia C''.

Obtener la ecuación de esta última circunferencia.

Solución

La circunferencia C tiene de centro y radio:

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{10}{2}=5 \\ b&=0 \end{aligned}\right\} a^2+b^2-r^2=21 \Rightarrow r=2$$

Centro M(5, 0) y radio r=2

Las ecuaciones del giro G(0, 60°) son:

$$x'=x\cos 60°-y\,\text{sen}\,60°=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$y'=x\,\text{sen}\,60°+y\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$$

El homólogo de M(5, 0) es:

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{1}{2}\cdot 5-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0=\frac{5}{2} \\ y'&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \quad M'\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

La circunferencia C se transforma en C' de centro

$$M'\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y radio } 2$$

— Las ecuaciones de la homotecia son:

$$x' - 5 = 2(x - 5)$$

$$y' - 0 = 2(y - 0)$$

el transformado de M' es M'' de coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} x' - 5 &= 2\left(\frac{5}{2} - 5\right) \\ y' &= 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} M''(0,\ 5\sqrt{3})$$

y el radio 2 se transforma en $k \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$.

La circunferencia C'' tiene de ecuación:

$$x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = 4^2$$

20. *Se consideran los puntos* $A(-1, 0)$ *y* $B(1, 0)$. *¿Qué transformación geométrica es la que asigna a cada punto P del plano, el baricentro G del triángulo PAB?*

Solución

El triángulo PAB tiene la base fija AB pero el punto P variable. variable.

El punto medio del lado AB es fijo O(0, 0)

También se sabe que

$$\frac{OG}{OP} = \frac{1}{3}$$

por tanto, al ser G el homólogo de P, estando alineados con O, se trata de una homotecia de centro O y razón $\frac{1}{3}$.

Sus ecuaciones son:

$$x' = \frac{1}{3}x$$

— Las ecuaciones de la homotecia son:

$$x' - 5 = 2(x - 5)$$
$$y' - 0 = 2(y - 0)$$

el transformado de M' es M'' de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} x' - 5 = 2\left(\dfrac{5}{2} - 5\right) \\ y' = 2 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} M''(0,\ 5\sqrt{3})$$

y el radio 2 se transforma en $k \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$.

La circunferencia C'' tiene de ecuación:

$$x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = 4^2$$

20. *Se consideran los puntos A (– 1, 0) y B (1, 0). ¿Qué transformación geométrica es la que asigna a cada punto P del plano, el baricentro G del triángulo PAB?*

Solución

El triángulo PAB tiene la base fija AB pero el punto P variable. variable.

El punto medio del lado AB es fijo O(0, 0)

También se sabe que

$$\frac{OG}{OP} = \frac{1}{3}$$

por tanto, al ser G el homólogo de P, estando alineados con O, se trata de una homotecia de centro O y razón $\frac{1}{3}$.

Sus ecuaciones son:

$$x' = \frac{1}{3}x$$

$$y'=\frac{1}{3}y$$

21. *Se considera la homotecia directa H cuyo centro es el origen de coordenadas y la razón de homotecia* $\frac{3}{2}$, siendo A′ *el transformado de A (0, 2). Por otra homotecia directa* H_1 *el punto A′ se transforma en A″ (4, 1) siendo la razón* k_1.

Hallar el centro de ésta H_1 *si*

$$1)\ k_1=\frac{2}{3} \qquad 2)\ k_1=\frac{1}{3}$$

Determinar en ambos casos el producto $H \cdot H_1$.

Solución

1 Las ecuaciones de $H\left[(0,\ 0),\ \frac{3}{2}\right]$ son:

$$x'=\frac{3}{2}x$$

$$y'=\frac{3}{2}y$$

El transformado de A(0, 2) es

$$\left.\begin{array}{l} x'=\frac{3}{2}\cdot 0=0 \\ y'=\frac{3}{2}\cdot 2=3 \end{array}\right\} A'(0,\ 3)$$

Las ecuaciones de H_1 para $k_1=\frac{2}{3}$

$$x'-a=\frac{2}{3}(x-a)$$

$$y' - b = \frac{2}{3}(y - b)$$

Como el punto A'(0, 3) se transforma en A''(4, 1) se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 4 - a = \frac{2}{3}(0 - a) \\ 1 - b = \frac{2}{3}(3 - b) \end{array}\right\} \Rightarrow a = 12 \text{ y } b = -3$$

La homotecia es $H_1\left[(12, -3), \frac{2}{3}\right]$

— El producto de las razones de las dos homotecias H y H_1 es 1, por tanto se trata de una traslación de vector cuyos componentes se calculan así:

$$x' = x + p$$
$$y' = y + q$$

Como $A(0, 2) \longrightarrow A'(4, 1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = 0 + p \\ 1 = 2 + q \end{array}\right\} \Rightarrow p = 4,\ q = -1$

Se trata pues

$$H\left[(0, 0), \frac{3}{2}\right] \cdot H_1\left[(12, -3), \frac{2}{3}\right] = T_{(4,\ -1)}$$

2) Las ecuaciones de H_1 para $k_1 = \frac{1}{3}$ son

$$x' - a = \frac{1}{3}(x - a)$$

$$y' - b = \frac{1}{3}(y - b)$$

El punto A'(0, 3) se transforma en A''(4, 1)

$$\left.\begin{aligned} 4-a&=\frac{1}{3}(0-a) \\ 1-b&=\frac{1}{3}(3-b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=6 \text{ y } b=0$$

La homotecia es

$$H_2\left[(6,\ 0),\ \frac{1}{3}\right]$$

El producto

$$H\left[(0,\ 0),\ \frac{3}{2}\right]\cdot H_2\left[(6,\ 0),\ \frac{1}{3}\right]=H_3\left[(m,\ n),\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\right]$$

Las ecuaciones de esta homotecia son:

$$x'-a=\frac{1}{2}(x-a)$$

$$y'-b=\frac{1}{2}(y-b)$$

Como el punto $A(0,\ 2)$ se transforma en $A''(4,\ 1)$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 4-a&=\frac{1}{2}(0-a) \\ 1-b&=\frac{1}{2}(2-b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=8 \text{ y } b=0$$

Luego

$$H\left[(0,\ 0),\ \frac{3}{2}\right]\cdot H_2\left[(6,\ 0),\ \frac{1}{3}\right]=H_3\left[(8,\ 0),\ \frac{1}{2}\right]$$

22. *Dadas las homotecias*

$$H_1[(0,\ 0),\ 2] \quad y \quad H_2\left[(0,\ 0),\ -\frac{1}{2}\right]$$

Estudiar las siguientes transformaciones

$$T_1=H_1\cdot H_2$$
$$T_2=H_2\cdot H_1$$
$$T_3=T_1\cdot T_2$$
$$T_4=T_2\cdot T_1$$

Solución

$$T_1=H_1\cdot H_2=H_1[(0,\ 0),\ 2]\cdot H_2\left[(0,\ 0),\ -\frac{1}{2}\right]=H_3[(0,\ 0),\ -1]$$

$$T_2=H_2\cdot H_1=H_2\left[(0,\ 0),\ -\frac{1}{2}\right]\cdot H_1[(0,\ 0),\ 2]=H_4[(0,\ 0),\ -1]$$

$$T_3=T_1\cdot T_2=H_3[(0,\ 0),\ -1]\cdot H_4[(0,\ 0),\ -1]=H[(0,\ 0),\ 1]$$

$$T_4=T_2\cdot T_1=H_4[(0,\ 0),\ -1]\cdot H_3[(0,\ 0),\ -1]=H[(0,\ 0),\ 1]$$

23. *Una semejanza del plano es el producto de una homotecia de centro (2, 0) y razón 4 por un giro de centro el origen y ángulo 180°. Encontrar las ecuaciones de la semejanza y encontrar el transformado del punto A (2, 6).*

Solución

— Ecuaciones de la homotecia

$$\begin{cases}x'-a=k(x-a)\\ y'-b=k(y-b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'-2=4(x-2)\\ y'-0=4(y-0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=4x-6\\ y'=4y\end{cases}$$

— Ecuaciones del giro

$$x''=-x'$$
$$y''=-y'$$

Luego las ecuaciones de la semejanza son:

$$x''=-(4x-6)=-4x+6$$
$$y''=-(4y)=-4y$$

El transformado de A(2, 6) es

$$A(2, 6) \longrightarrow A'(-2, -24)$$

24. *Una semejanza en el plano es el producto de una homotecia de centro (2, 0) y razón 4 por un giro de centro el origen y amplitud 90°. Se pide:*

1) Las ecuaciones de la semejanza

2) El homólogo del punto P (2, 6)

Solución

1) Ecuaciones de la homotecia

$$\begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(y-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-2=4(x-2) \\ y'-0=4(y-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=4x-6 \\ y'=4y \end{cases}$$

Ecuaciones del giro

$$x''=x'\cos 90^\circ - y'\operatorname{sen} 90^\circ = -y'$$
$$y''=x'\operatorname{sen} 90^\circ + y'\cos 90^\circ = x'$$

— Las ecuaciones de la semejanza son:

$$x''=-y'=-4y$$
$$y''=x'=4x-6$$

2) El homólogo de P(2, 6) es

$$\begin{matrix} x''=-24 \\ y''=8 \end{matrix} \Rightarrow P'(-24, 8)$$

25. *Una semejanza del plano es el producto de una homotecia de centro (2, 0) y razón 2, por un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 90°. Encontrar las ecuaciones de la semejanza y las coordenadas del centro.*

Solución

1) Las ecuaciones de la homotecia son:

$$\begin{cases} x'-2=2(x-2) \\ y' \quad =2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=2x-2 \\ y'=2y \end{cases}$$

Ecuaciones del giro

$$x''=x'\cos 90^\circ - y'\operatorname{sen} 90^\circ = -y'$$
$$y''=x'\operatorname{sen} 90^\circ + y'\cos 90^\circ = x'$$

Las ecuaciones de la semejanza son:

$$x''=-y'=-2y$$
$$y''=x'=2x-2$$

2) Como el centro es un punto invariante

$$\begin{cases} x=-2y \\ y=2x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y \quad =0 \\ -2x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

por lo tanto el centro de la semejanza es $\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$ y la razón 2.

26. *Una semejanza en el plano es el producto de una homotecia de centro M (3, 0) y razón 3 por un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 180°. Encontrar las ecuaciones de la semejanza y el transformado del punto A (4, 5).*

Solución

Las ecuaciones de la semejanza son:

$$x'=-3x+6$$
$$y'=-3y$$

El homólogo de A(4, 5) es A'(−6, −15).

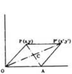
27. *Para cada punto P del plano se considera el paralelogramo P0AP', siendo 0 el origen de coordenadas y A (1, 0). Se pide:*

1) ¿Qué transformación geométrica es la que hace corresponder a cada punto P el punto P′ así determinado?

2) ¿Qué transformación geométrica es la que hace corresponder a cada punto P el de intersección C de las diagonales del paralelogramo anterior?

Solución

1) Se dibuja el paralelogramo en el que PP′ = OA. Como siempre queda determinado el vector OA esta transformación geométrica es una *traslación* de vector de componentes (1, 0)



2) Las diagonales se cortan en el punto medio C, luego

$$\frac{OC}{OP'} = \frac{1}{2}$$

El punto C es el homólogo de P′ en una homotecia de centro el origen y razón 1/2.

Como el homólogo de P es P′ en una traslación y el homólogo de P′ es C en una homotecia, el homólogo de P será C en una *semejanza.*

$$\text{Semejanza} = T_{(1,\ 0)} \times H\left[(0,\ 0),\ \frac{1}{2}\right]$$

28. *Dados los puntos A (1, 0) y B (2, 2), calcular las coordenadas del punto C, sabiendo que la longitud del segmento AC es doble de la del segmento AB y que el ángulo $\widehat{BAC} = 60°$.*

Solución

El punto B se transforma en C al aplicarle la homotecia de centro A(1, 0) y un grupo también de centro A y amplitud 60°.

Por tanto, las ecuaciones de la homotecia son:

$$\begin{cases} x'-1=2(x-1) \\ y'-0=2(y-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y \end{cases}$$

El transformado de B(2, 2) es:

$$\begin{matrix} x'=2\cdot 2-1=3 \\ y'=2\cdot 2=4 \end{matrix} \Rightarrow B'(3,\ 4)$$

Las ecuaciones del giro son:

$$\begin{cases} x'-1=(x-1)\cos 60°-y\ \mathrm{sen}\ 60° \\ y'=(x-1)\ \mathrm{sen}\ 60°+y\cos 60° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-1=(x-1)\cdot\dfrac{1}{2}-y\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y'=(x-1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+y\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

es decir,

$$x'=1+(x-1)\cdot\frac{1}{2}-y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y'=(x-1)\frac{\sqrt{3}}{2}+y\cdot\frac{1}{2}$$

El transformado de B'(3, 4) es:

$$x'=1+(3-1)\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2-2\sqrt{3}$$

$$y'=(3-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}+2$$

El punto C tiene de coordenadas:

$$C(2-2\sqrt{3},\ \sqrt{3}+2)$$

29. *Los puntos A (0, 2a) y B (0, a) se transforman por una semejan-*

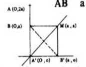
za en los $A'(0, 0)$ y $B'(a, 0)$. Hallar las coordenadas del centro de semejanza y especificar un giro (del cual se determinará su centro y su amplitud) y una homotecia (de la cual se determinará su centro y su razón), cuyo producto sea la semejanza anterior.

Solución

— Los segmentos AB y A'B' homólogos forman un ángulo de 90°, luego el giro es G(M, 90°).

— La razón de homotecia es la razón de dos segmentos homólogos

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{a}{a}=1$$



El centro de semejanza y de giro son iguales, ya que la homotecia, al tener de razón 1, se convierte en la identidad

$$S=H(M,\ 1)\times G(M,\ 90°)=I\cdot G(M,\ 90°)$$

El centro de giro por definición se encuentra en la mediatriz del segmento AA' y en la mediatriz del segmento BB'.

Como A(0, 2a) y A'(0, 0), la meditriz de AA' es $y=a$.

Como B(0, a) y B'(a, 0), la mediatriz de BB' es $y=x$.

Luego

$$\left.\begin{array}{l} y=a \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow M(a,\ a)$$

La semejanza tiene de centro M(a, a).

30. *Dada la matriz*

$$M=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Se pide:

1) ¿Corresponde M a una semejanza?

2) Determinar en caso positivo la razón y si se trata de directa o inversa.

3) ¿Cuánto medirán los lados del triángulo rectángulo semejante al de lados 3, 4 y 5 cm?

Solución

1) Corresponde M a una semejanza, ya que es la de forma:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

2) La razón $A^2+B^2=r^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2+(-1)^2=2^2 \Rightarrow r=2$

Se trata de una semejanza directa.

3) Los lados del triángulo semejante se obtienen multiplicando los anteriores por la razón de semejanza.

Por tanto, 6, 8 y 10 cm son los lados del triángulo semejante al primero.

31. *Una semejanza viene dada por la matriz*

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar:

1) La razón de semejanza.

2) Si se trata de semejanza directa o inversa.

3) Su descomposición en producto de homotecia y movimiento.

Solución

1) La razón de semejanza la obtenemos así:

$$1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=2^2 \Rightarrow r=2$$

La razón es $r=2$.

2) Se trata de una semejanza inversa, ya que es de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

3) Su descomposición la hacemos así:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

de donde $2a=1$, $2b=\sqrt{3}$, $2c=\sqrt{3}$, $2d=1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se trata de una simetría cuyo eje lo obtenemos así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y&=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\sqrt{3}y$$

ya que los puntos del eje son invariantes.

32. *Una semejanza viene dada por la matriz*

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1) El centro y la razón de semejanza.

2) Decir si se trata de una semejanza directa o inversa.

3) Descomponerla en producto de homotecia y giro o de homotecia y simetría.

Solución

1) Al ser una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

se trata de una semejanza directa de razón

$$A^2+B^2=1^2+(-\sqrt{3})^2=2^2=r^2$$

La razón es $r=2$.

El centro, al ser un punto invariante, se obtiena así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de donde $x=0$, $y=0 \Rightarrow$ El centro es $(0, 0)$.

2) Se trata de una semejanza directa por la forma de la matriz.

3) Al ser directa se descompone en producto de homotecia y giro, así:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{-\sqrt{3}}{2},\ c=\frac{\sqrt{3}}{2},\ d=\frac{1}{2}$$

Queda descompuesta en una homotecia de razón 2 por un giro de matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

33. *Las ecuaciones*

$$t(e_1)=4e_1+3e_2$$
$$t(e_2)=3e_1-4e_2$$

Son de una semejanza inversa. Se pide:

1) Hallar la matriz de la semejanza.

2) La razón de la homotecia que compuesta con una simetría origina la semejanza dada.

3) Matriz de la simetría.

4) Transformado de $x=2e_1-2e_2$ por la simetría.

5) Ecuaciones del eje de simetría.

Solución

1) La matriz de la semejanza

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2) La razón de homotecia la obtenemos calculando el determinante de la matriz de semejanza

$$|M|=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-4^2-3^2=-(4^2+3^2)=-5^2 \Rightarrow r=5$$

que también es la razón de la semejanza dada.

3) La matriz de la simetría la obtenemos sabiendo que la matriz de la homotecia es:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

componiendo con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ resulta $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{4}{5},\ b = \frac{3}{5},\ c = \frac{3}{5},\ d = -\frac{4}{5}$$

La matriz de la simetría es:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

4) El transformado de $x = 2e_1 - 2e_2$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Rightarrow x_1' = \frac{2}{5},\ x_2' = \frac{14}{5}$$

por tanto: $x' = \frac{2}{5}e_1 + \frac{14}{5}e_2$

5) La ecuación del eje de simetría dija invariante cualquier punto

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3x_2$$

La recta es de ecuación: $x - 3y = 0$

$$t(e_1) = 5e_1 - 12e_2$$
$$t(e_2) = 12e_1 + 5e_2$$

s (min.) son de una semejanza directa. Se pide:

1) Hallar la matriz de la semejanza.

2) La razón de homotecia que compuesta con una simetría origina la semejanza dada.

3) Matriz de la rotación.

4) Transformado de $x = 3e_1 + 4e_2$, por la rotación.

Solución

1) Matriz de la semejanza

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

2) La razón de la homotecia se obtiene

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 5^2 + 12^2 = 13^2$$

la razón es $r = 13$ que es la misma que la de la semejanza dada.

3) La matriz de la rotación la obtenemos así:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

luego

$$a = \frac{5}{13},\ b = -\frac{12}{13},\ c = \frac{12}{13},\ d = \frac{5}{13}$$

La matriz de la rotación es

$$\begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

4) El transformado de $x=3e_1+4e_2$

$$[3\quad 4]\begin{bmatrix} 5/13 & -12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{63}{13} & \frac{-16}{13} \end{bmatrix}$$

luego $$x'=\frac{63}{13}e_1-\frac{16}{13}e_2$$

35. *Escribir las matrices de las dos semejanzas que transforman el vector $x=4e_1-2e_2$ en $y=10e_1-10e_2$.*

Solución

Se cumple que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow M_1=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow M_2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

36. *Utilizando la expresión matricial de las semejanzas, estudiar si el conjunto de las semejanzas tanto directas como inversas tiene estructura de grupo abeliano respecto al producto o composición de semejanzas.*

Solución

— *Operación interna:*

$$M(s_1)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad M(s_2)=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$M(s_1)\cdot M(s_2)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

Cumpliéndose:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)=$$
$$=c^2r^2+d^2r^2=r^2(c^2+d^2)=r^2\cdot r'^2=(rr')^2=r''^2$$

La cumple.

— *Propiedad asociativa:*

$$M(s_1)\cdot[M(s_2)M(s_3)]=[M(s_1)M(s_2)]M(s_3)$$

que también la cumple.

— *Elemento neutro:* Es la transformación identidad.

— *Elemento inverso:* Sea H una homotecia de razón $r\neq 0$ y S una simetría. La semejanza $H\cdot S$ tiene como inversa

$$(H\cdot S)^{-1}=S^{-1}H^{-1}=S\cdot H^{-1}$$

que existe porque existen S y H^{-1}. La razón de H^{-1} es $\frac{1}{r}$ y la razón de SH^{-1} es $\frac{1}{r}$.

Sea H una homotecia de razón $r\neq 0$ y G un giro.

La semejanza HG tiene como inversa:

$$(HG)^{-1}=G^{-1}H^{-1}=GH^{-1}$$

que existe porque existen G y H^{-1}.

— *Propiedad conmutativa:* Tomemos una semejanza directa y otra inversa

$$M(s_1)=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix} \qquad M(s_2)=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$$

$$M(s_2)\cdot M(s_1)=\begin{pmatrix}ca-db & cb+da\\ da+cb & -(ca-db)\end{pmatrix}$$

$$M(s_1)\cdot M(s_2)=\begin{pmatrix}ca+db & cb-da\\ -da+cb & -(ca+db)\end{pmatrix}$$

$$M(s_2)\cdot M(s_1)\neq M(s_1)\cdot M(s_2)$$

No es conmutativa.

El grupo no es abeliano.

37. *Utilizando la expresión matricial de las semejanzas directas estudiar si tienen estructura de grupo abeliano respecto al producto o composición de semejanzas.*

Solución

— *Operación interna:* La cumple

$$M(s_1)\cdot M(s_2)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$$

— *Propiedad asociativa:* La cumple.

— *Elemento neutro:*

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— *Elemento inverso:*

$$M(s)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{con } a^2+b^2=r^2$$

Su simétrico o inverso es

$$M(s^{-1})=\begin{pmatrix} \frac{a}{r^2} & \frac{b}{r^2} \\ -\frac{b}{r^2} & \frac{a}{r^2} \end{pmatrix}$$

que también es semejanza directa.

— *Propiedad conmutativa:*

$$M(s_2)\cdot M(s_1)=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$=M(s_1)\cdot M(s_2)$$

Es un grupo abeliano.

38. *Definir el centro y la razón de semejanza*

$$x'=\ \ 3x+4y+1$$
$$y'=-4x+3y+2$$

indicando si es directa o inversa.

Descomponerla en producto de traslaciones, homotecias, giros y simetrías.

Solución

Las ecuaciones se pueden poner de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La razón la obtenemos así: $3^2+4^2=5^2 \Rightarrow r=5$

El centro como es un punto invariante:

$$\begin{cases} x=\ \ 3x+4y+1 \\ y=-4x+3y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=-1 \\ -4x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{10},\ y=-\frac{4}{10}$$

son las coordenadas del centro.

Como se trata de una semejanza directa se descompone en producto de homotecia de razón 5 y rotación

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a=\frac{3}{5},\ b=\frac{4}{5},\ c=-\frac{4}{5},\ d=\frac{3}{5}$$

La matriz del giro o rotación es

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Podemos pues descomponer la semejanza dada en una traslación de componentes 1 y 2, en una homotecia de centro $\left(\frac{3}{10}, -\frac{4}{10}\right)$ y razón 5 y en un giro de matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

39. *Definir el centro y la razón de semejanza*

$$(x, y) \longrightarrow (x+\sqrt{3}y,\ \sqrt{3}+\sqrt{3}x-y)$$

indicando si es directa e inversa.

Descomponer en producto de traslaciones, giros, homotecias y simetrías.

Solución

Se puede poner la semejanza de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'-\sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La razón la obtenemos así: $1^2+(\sqrt{3})^2=2^2=r^2 \Rightarrow r=2$

El centro al ser punto invariante

$$\left.\begin{aligned} x &= x+\sqrt{3}y \\ y-\sqrt{3} &= \sqrt{3}x-y \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0,\ x=-1$$

El centro es $(-1,\ 0)$.

Como se trata de una semejanza inversa se puede descomponer en producto de la homotecia de razón 2 por una simetría:

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{\sqrt{3}}{2},\ c=\frac{\sqrt{3}}{2},\ d=-\frac{1}{2}$$

La matriz de la simetría es

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Para conocer la ecuación del eje de simetría lo hacemos considerando invariantes los puntos del eje

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\sqrt{3}y$$

Podemos descomponer la semejanza dada de centro $(-1,\ 0)$ y razón 2 en el producto de una traslación de vector de componentes $(0,\ \sqrt{3})$ por una homotecia de centro $(-1,\ 0)$ y razón 2 por una simetría axial de eje $x=\sqrt{3}y$.

7. Areas y volúmenes de cuerpos geométricos

CONCEPTOS TEORICOS

— **Prisma**

$$A_l = P \cdot a$$
$$A_t = P \cdot a + 2B$$
$$V = B \cdot h$$

— **Pirámide**

$$A_l = \frac{P \cdot a}{2}$$
$$A_t = \frac{P \cdot a}{2} + B$$
$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

— **Cilindro**

$$A_l = 2\pi r \cdot h$$
$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

— **Cono**

$$A_l = \pi r g$$
$$A_t = \pi r g + \pi r^2$$
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

— **Tronco de pirámide**

$$A_l = \frac{(P+P') \cdot a}{2}$$

$$A_t = \frac{(P+P') \cdot a}{2} + B + B'$$

$$V = \frac{(B+B'+\sqrt{BB'}) \cdot h}{3}$$

— **Tronco de cono**

$$A_l = \pi(R+r)g$$

$$A_t = \pi(R+r)g + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$V = \frac{\pi(R^2+r^2-Rr) \cdot h}{3}$$

— **Zona o casquete esférico**

$$A = 2\pi r \cdot h$$

— **Superficie esférica**

$$A = 4\pi r^2$$

— **Huso esférico**

$$A = \frac{\pi r^2 \cdot n}{90}$$

— **Sector esférico**

$$V = \frac{2\pi r^2 \cdot h}{3}$$

— **Esfera**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

— **Cuña esférica**

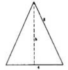
$$V = \frac{\pi r^3 \cdot n}{270}$$

PROBLEMAS

1. *Determinar el área de un octaedro regular de lado 8 cm.*

Solución

El octaedro está formado por ocho triángulos equiláteros iguales. El área de uno de ellos la obtenemos así



$$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

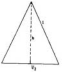
$$\text{Area} = \frac{b \times h}{2} = \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$\text{Area octaedro} = 8\ A = 8(16\sqrt{3}) = 128\ \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

2. *Calcular el área de un icosaedro regular sabiendo que la altura de uno de los triángulos regulares que lo forman mide $2\sqrt{3}$ cm.*

Solución

El icosaedro regular es un poliedro formado por 20 triángulos equiláteros iguales



$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$(2\sqrt{3})^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow l^2 = \frac{12 \times 4}{3} = \frac{48}{3} \Rightarrow l = 4\ \text{cm}$$

$$\text{Area cara} = \frac{l \times h}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$\text{Area icosaedro} = 20 \times (4\sqrt{3}) = 80\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

3. *Hallar el área de un cubo sabiendo que la diagonal de una cara mide $5\sqrt{2}$ m.*

Solución

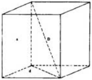
$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$(5\sqrt{2})^2 = 2l^2 \Rightarrow 50 = 2l^2 \Rightarrow l = 5 \text{ m}$$

$$\text{Area del cubo} = 6 \times \text{Area cuadrado} = 6 \times l^2 = 6 \times 5^2 = 150 \text{ m}^2$$

4. *La suma de la diagonal de un cubo y la diagonal de una cara es 40 cm. Calcular el área total y el volumen.*

Solución



$$A_t = 6a^2$$

$$\left.\begin{matrix} D^2 = a^2 + d^2 \\ d^2 = a^2 + a^2 \end{matrix}\right\} D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

Por tanto:

$$D = a\sqrt{3}$$
$$d = a\sqrt{2}$$
$$D + d = a(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 40$$
$$a = \frac{40}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

Luego

$$\text{Area} = 6a^2 = 6 \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = a^3 = \left(\frac{40}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right)^3 \text{ cm}^3$$

5. *Determinar el área lateral y total de un prisma recto de 12 cm de altura y de base un triángulo rectángulo de catetos 9 y 12 cm.*

Solución

$$\text{Area lateral} = \text{Perímetro} \times \text{altura}$$

Como la base es un triángulo rectángulo de catetos 9 y 12 cm la hipotenusa vale

$$a = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

$$P = 9 + 12 + 15 = 36 \text{ cm}$$

$$A_l = P \times h = 36 \times 12 = 432 \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_l + 2B = 432 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 12}{2} = 540 \text{ cm}^2$$

6. *De las tres aristas concurrentes en un cubo, una se aumenta en 3 cm, otra en 4 cm y la tercera se disminuye en 2 cm; queda así convertido en un ortoedro cuyo volumen excede al del cubo en 672 cm³. Hallar la arista del cubo.*

Solución

$$\text{Volumen ortoedro} = (a+3)(a+4)(a-2)$$

$$\text{Volumen ortoedro} = \text{Volumen cubo} + 672$$

Luego

$$(a+3)(a+4)(a-2) = a^3 + 672$$

$$a^3 + 5a^2 - 2a - 24 = a^3 + 672$$

$$5a^2 - 2a - 696 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 13.920}}{10} = \frac{2 \pm 118}{10} = \begin{cases} 12 \\ \text{negativo} \end{cases}$$

La arista del cubo es $a = 12$ cm.

7. *La suma de las aristas de un tetraedro regular es 24 cm. Hallar su volumen.*

Solución

$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \text{ cm}.$$

Para el volumen necesitamos conocer el baricentro de la base, luego su altura

$$h' = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$m = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$h = \sqrt{a^2 - m^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

El area de la base es:

$$B = \frac{a \times h'}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}4\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3.$$

8. *Un huso esférico de 120° perteneciente a una superficie esférica de radio 3 cm tiene igual área que un casquete perteneciente a la misma superficie esférica. Calcular la altura del casquete.*

Solución

$$\text{Area casquete} = 2\pi r \cdot h = 6\pi h$$

$$\text{Area huso esférico} = \frac{\pi r^2 \cdot n}{90} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 120}{90} = 12\pi$$

Luego

$$6\pi h = 12\pi \Rightarrow h = 2 \text{ cm}.$$

9. *Un circo utiliza una tienda de lona de forma cilíndrica de 16 m de radio y 3 m de altura, terminando por un cono del mismo radio y 12 cm de altura. ¿Cuánto le costará a este circo hacer una tienda nueva si la lona vale a 950 pesetas/m², sabiendo que se desperdicia de lona 6,5 m²?*

Solución

Se trata de un cilindro de radio 16 m y altura 3 m, por tanto,

$$A_1 = 2\pi rh = 2\pi \cdot 16 \cdot 3 = 96\pi \text{ m}^2$$

La cúpula es un cono de radio 16 m y altura 12 m

$$A_1' = \pi rg = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = 16\pi\sqrt{12^2 + 16^2} = 16 \cdot \pi \cdot 20 = 320\pi \text{ m}^2$$

Como se desperdicia 6,5 m²

$$\text{Lona} = A_1 + A_1' + 6{,}5 = 96\pi + 320\pi + 6{,}5 = 1.312{,}74 \text{ m}^2.$$

$$\text{Precio} = 1.312{,}74 \times 950 = 1.247.103 \text{ pesetas.}$$

10. *El lado de un exágono regular mide 6 cm. Calcular el área lateral y total del cono circunscrito a la pirámide que tiene por base el citado exágono y 8 cm de altura.*

Solución

El cono circunscrito tiene de radio 6 cm, igual que el lado del exágono. La altura del cono es la misma que la de la pirámide, luego

$$g = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$A_1 = \pi rg = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_1 + B = 60\pi + 36\pi = 96\pi \text{ cm}^2$$

11. *Un octaedro regular se divide en dos pirámides cuadrangulares cuya arista mide 10 cm. Se pide:*

1) Area del octaedro.

2) Volumen del octaedro.

Solución

1)

$$a=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$$

2) Area octaedro:

$$8\cdot\frac{1\cdot a}{2}=8\cdot\frac{10\cdot 5\sqrt{3}}{2}=200\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

3) Para el volumen de una pirámide

$$h=\sqrt{a^2-\frac{l^2}{4}}=\sqrt{75-25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$V=\frac{1}{3}B\times h=\frac{1}{3}l^2\cdot h=\frac{1}{3}10^2\cdot 5\sqrt{2}=\frac{500}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

Volumen ortoedro = 2 volumen pirámide =

$$=2\cdot\frac{500\sqrt{2}}{3}=\frac{1.000\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$$

12. *Un cono que tiene su vértice en el centro de un cubo de 8 cm de arista, su base es el círculo inscrito en la base del cubo. Hallar:*

1) Su área lateral.

2) Su área total.

3) Su volumen.

Solución

La altura del cono es 4 cm y el radio de la base es también 4.

$$A_l=\pi rg=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi\cdot 4\sqrt{4^2+4^2}=16\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^2$$

2)

$$A_t = A_l + \pi r^2 = 16\sqrt{2}\pi + 16\pi = 16\pi(1+\sqrt{2})\ \text{cm}^2$$

3)

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}16\pi \cdot 4 = \frac{64}{3}\pi\ \text{cm}^3$$

13. *Hallar el volumen de un cilindro de 4 m de diámetro y 4 m de altura, de una esfera de 4 m de diámetro y de un cono de 4 m de diámetro y 4 m de altura. Obtener los tres volúmenes y determinar la relación que existe entre ellos.*

Solución

$$V_1 = \text{Volumen cilindro} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi\ \text{m}^3$$

$$V_2 = \text{Volumen esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}\text{m}^3$$

$$V_3 = \text{Volumen cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}\ \text{m}^3$$

Resulta:

$$\left.\begin{matrix} V_1 = 3V_3 \\ V_2 = 2V_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{V_1}{3} = \frac{V_2}{2} = V_3$$

14. *En una esfera de 10 cm de radio se traza un plano que dista 8 cm del centro. Se pide:*

1) El área de los dos casquetes esféricos.

2) El volumen del sector que comprende el menor casquete.

3) El volumen del cono que tiene por vértice el centro de la esfera y por base el plano.

Solución

1)

$$A_1 = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 = 40\pi \ \text{cm}^2$$
$$A_2 = 2\pi Rh' = 2\pi \cdot 10 \cdot 18 = 360\pi \ \text{cm}^2$$

2)

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 2 = \frac{400\pi}{3} \ \text{cm}^3$$

3)

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 8 = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 8^2) \cdot 8 = \frac{1}{3} = (10^2 - 8^2) \cdot 8 = 96\pi \ \text{cm}^3$$

15. *Un rectángulo al girar sobre los dos lados contiguos engendra dos cilindros cuyos cuyas áreas totales son 98π y 1.152π. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?*

Solución

Al girar sobre el lado mayor b

$$A_t = 2\pi ab + 2\pi a^2 = 2\pi a(a+b)$$

Al girar sobre el lado menor a

$$A_t' = 2\pi ba + 2\pi b^2 = 2\pi b(a+b)$$

De donde

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi a(a+b) = 98\pi \\ 2\pi b(a+b) = 1.152\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a(a+b) = 49 \\ b(a+b) = 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 = a^2 + ab \\ 576 = b^2 + ab \\ \hline 49 + 576 = a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \Rightarrow 625 = (a+b)^2 \Rightarrow a + b = 25$$

Por tanto,

$$a=\frac{49}{a+b}=\frac{49}{25}$$

$$b=\frac{576}{a+b}=\frac{576}{25}$$

16. *Durante la reparación de averías en la conducción de aguas a una ciudad hay que habilitar un depósito provisional de forma cilíndrica. Este depósito tiene una altura doble que la del diámetro y entre ambas longitudes suman 60 m. ¿A cuántos litros diarios hay que racionar el agua por habitante para que el agua del depósito llegue a los 20 días de las reparaciones? La población tiene 15.700 habitantes.*

Solución

Se tiene:

$$2d+d=60 \Rightarrow d=20 \qquad y \qquad r=10$$

$$V=\pi \cdot r^2 \cdot (2d)=10^2 \cdot \pi \cdot 40=4.000\pi=12.560 \text{ m}^3=$$
$$=12.560.000 \text{ l}$$

Raciones $=15.700 \times 20=314.000$.

Agua por habitante/día $=\dfrac{12.560.000}{314.000}=40$ litros.

17. *Dos cajas de detergente de 22,5 cm por 8 cm y por 15,5 cm una y otra de 21 cm por 7,5 cm por 16,5 cm se compran al mismo precio. ¿Cuál de los dos detergentes es más barato?*

Solución

$$V_1=22{,}5 \times 8 \times 15{,}5=2.790 \text{ cm}^3$$
$$V_2=21 \times 7{,}5 \times 16{,}5=2.598{,}75 \text{ cm}^3$$

Es más barato el primer detergente, ya que al mismo precio el volumen es mayor.

18. *Una esfera ha sido embalada en una caja cúbica cuya arista mide 50 cm y tal que todas sus caras son tangentes a la esfera. Se pide:*

1) Volumen de la esfera.

2) Espacio vacío que se ha rellenado con embalaje.

Solución

$$r=\frac{50}{2}=25 \text{ cm}$$

$$V_e=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 25^3=\frac{62.500}{3}\pi \text{ cm}^3$$

$$V_c=a^3=50^3=125.000 \text{ cm}^3$$

$$\text{Espacio vacío}=V_c-V_e=125.000-\frac{62.500\pi}{3}=59.583{,}3 \text{ cm}^3$$

19. *Un vaso está lleno de agua. Se introduce en él una esfera y se derraman 36π cm³ de agua. Calcular el radio de la esfera.*

Solución

$$V=36\pi=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 36=\frac{4}{3}R^3 \Rightarrow R^3=27 \Rightarrow R=3 \text{ cm}$$

20. *El perímetro de un triángulo isósceles es 64 cm, y cada uno de los lados iguales excede en 11 cm al lado BC. Hallar:*

1) Los lados y la altura.

2) El área total y el volumen del cuerpo engendrado por este triángulo al girar sobre la altura.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l}2a+b=64\\ a=11+b\end{array}\right\} \Rightarrow 2(11+b)+b=22+3b=64 \Rightarrow b=14 \text{ cm}$$

$$a=11+b=11+14=25 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \text{altura } h=\sqrt{25^2-7^2}=24 \text{ cm}$$

2) Al girar sobre la altura se engendra un cono

$$A_l=\pi r g=7\cdot 25\pi=175\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t=A_l+\pi r^2=175\pi+49\pi=224\pi \text{ cm}^2$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\cdot 7^2\sqrt{25^2-7^2}=\frac{1}{3}\pi\cdot 49\cdot 24=392\pi \text{ cm}^3$$

21. *Determinar el área lateral, el área total y el volumen de un cono de revolución, sabiendo que el desarrollo de su superficie lateral es un sector circular de 12 cm de radio y 18,84 cm de longitud de arco?*

Solución

$$L=18{,}84=2\pi r \Rightarrow r=\frac{9{,}42}{\pi}=3 \text{ cm}$$

$$g=12 \text{ cm}$$

$$A_l=\frac{2\pi r}{2}\cdot g=\frac{L}{2}g=\frac{18{,}84}{2}\cdot 12=113{,}04 \text{ cm}^2$$

$$A_t=A_l+\pi r^2=A_l+3^2\cdot\pi=113{,}04+28{,}26=141{,}3 \text{ cm}^2$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\cdot 28{,}26\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 28{,}26\cdot\sqrt{12^2-3^2}=28{,}26\sqrt{15} \text{ cm}^3$$

22. *En un jardín de 80 m × 100 m. Se construye una piscina que tiene 20 m × 24 m y 2 m de profundidad. Si la tierra extraída se esparce por el resto del terreno de forma homogénea, ¿cuánto se habrá elevado éste?*

Solución

Volumen piscina $= 20 \times 24 \times 2 = 960 \text{ m}^3$

Volumen ortoedro $= 960 = 80 \times 100 \times h \Rightarrow h = \dfrac{960}{8.000} = 0{,}12$ m.

El jardín se ha elevado 0,12 m con la tierra extraída.

23. *Una pirámide cuadrangular regular tiene de base una cara de un cubo de 64 cm³ de volumen. Si el vértice de la pirámide es el centro del cubo. Determinar:*

1) Su área lateral.

2) Su área total.

3) Su volumen.

Solución

$$V = l^3 = 64 \Rightarrow l = 4$$

1) $$A_l = \frac{P \times a}{2} = \frac{(4 \cdot 4) \times \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{16 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

2) $$A_t = A_l + l^2 = 32\sqrt{2} + 4^2 = 16\sqrt{2} + 16 \text{ cm}^2$$

3) $$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} l^2 \times h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$$

24. *Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm gira alrededor de cada uno de sus catetos y de la hipotenusa. Hallar el área lateral, el área total y el volumen de cada uno de los cuerpos así formados.*

Solución

— Cateto mayor sobre el eje

$A_l = \pi r g = 3 \cdot 5 \cdot \pi = 15\pi \text{ cm}^2$

$A_t = \pi r g + \pi r^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$

— Cateto menor sobre el eje

$A_l = \pi r g = 4 \cdot 5 \cdot \pi = 20\pi \text{ cm}^2$

$A_t = A_l + \pi r^2 = 20\pi + 16\pi = 36\pi \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi \text{ cm}^3$

— Hipotenusa sobre el eje

$$3 \cdot 4 = 5 \cdot r \Rightarrow r = \frac{12}{5}$$

$A_l' = \pi r g' = \frac{12}{5} \cdot 4\pi = \frac{48\pi}{5} \text{ cm}^2$

$A_l'' = \pi r g'' = \frac{12}{5} \cdot 3\pi = \frac{36\pi}{5} \text{ cm}^2$

$A_l = A_l' + A_l'' = \frac{48\pi}{5} + \frac{36\pi}{5} = \frac{84\pi}{5} \text{ cm}^2$

$V' = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{2.304}{375}\pi \text{ cm}^3$

$V'' = \frac{1}{3}\pi r^2 h' = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{1.296}{375}\pi \text{ cm}^3$

$V = V' + V'' = \frac{2.304}{375}\pi + \frac{1.296}{375}\pi = \frac{3.600}{375}\pi \text{ cm}^3$

25. *Dos monumentos tienen el mismo volumen. Uno es un cubo de 8 m de arista y el otro es una pirámide regular de base cuadrada de 8 m de lado. Hallar la altura, la apotema y la longitud de la arista lateral de la pirámide.*

Solución

$V_c = 8^3 = 512 \ m^3$

$$\left.\begin{array}{l} V_{-c} = 8^3 = 512 \ m^3 \\ V_p = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}8^2h \end{array}\right\} \quad V_c = V_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8^3 = \frac{1}{3}8^2h \Rightarrow h = 24 \ m$$

$$a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 4^2} = 4\sqrt{37} \ m$$

$$l' = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{592 + 16} = 4\sqrt{38} \ m$$

26. *Un prisma recto tiene de bases rombos cuyas diagonales miden 64 cm y 48 cm. Calcular el área lateral, el área total y el volumen del prisma, sabiendo que su altura y su arista básica miden lo mismo.*

Solución

$$\text{Area base} = \frac{D \times d}{2} = \frac{64 \times 48}{2} = 1.536 \ cm^2$$

$$l = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \ cm$$

El lado de la base y la altura miden 40 cm.

$A_l = P \times a = (4 \ l)l = 6.400 \ cm^2$

$A_t = A_l + 2B = 6.400 + 2 \cdot 1.536 = 9.472 \ cm^2$

$V = Bh = 1.536 \cdot 40 = 61.440 \ cm^3$

27. *Se tiene un cono de base tangente a una esfera y cuyo vértice es el centro de la esfera. Además es: Volumen de la esfera igual a 16 veces el del cono y volumen de la esfera menos el del cono igual a 106 cm³. Calcular el radio de la esfera.*

Solución

$$V_{esfera} = 16\ V_{cono}$$

$$V_{esfera} - V_{cono} = 106$$

Se tiene:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 R$$

Luego:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 16 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 R$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 R = 106$$

de donde

$$R^2 = 4r^2 = (2r)^2 \Rightarrow r^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{4} R = 106$$

$$\frac{15}{12}\pi R^3 = 106 \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \text{ cm.}$$

28. *El radio de una naranja pelada, supuesta esférica es de 6 cm y se descompone en 16 gajos iguales. Calcular el volumen de un gajo y su superficie total.*

Solución

El volumen corresponde a un huso esférico de amplitud $\frac{360}{16}=22,5$, por tanto

$$V=\frac{\pi r^3 \cdot n}{270}=\frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 22,5}{270}=18\ \pi\ cm^3$$

El área corresponde a un huso esférico de amplitud 22,5

$$A=\frac{\pi r^2 \cdot n}{90}=\frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 22,5}{90}=9\pi\ cm^2$$

29. *Calcular el área total y el volumen del cilindro circunscrito a un prisma rectangular que tiene de altura 10 cm y de base un cuadrado de 6 cm de lado. ¿Cuál es el volumen comprendido entre ambos cuerpos?*

Solución

$$d=\sqrt{l^2+l^2}=d=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$r=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$A_l=2\pi rh=2\pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 10=60\sqrt{2}\pi\ cm^2$$

$$A_t=A_l+2B=60\sqrt{2}\pi+2\pi(3\sqrt{2})^2=60\sqrt{2}\pi+36\pi\ cm^2$$

$$V_c=\pi r^2 h=\pi(3\sqrt{2})^2 \cdot 10=180\ \pi\ cm^3$$

$$V_p=Bh=l^2 \cdot h=6^2 \cdot 10=360\ \pi\ cm^3$$

Volumen comprendido $=V_p-V_1=180(\pi-2)\ cm^3$.

30. *Determinar el área lateral y total de un cono recto cuya generatriz y radio son 15 y 9 cm, respectivamente.*

Este cono se secciona por un plano paralelo a la base obteniéndose un cono truncado de altura 8 cm. Calcular el área del tronco de cono y del cono truncado así obtenido.

Solución

$$A_l = \pi rg = \pi \cdot 15 \cdot 9 = 135\ \pi\ cm^2$$
$$A_t = \pi rg + \pi r^2 = 135\ \pi + 81\ \pi = 216\ \pi\ cm^2$$

Obtenemos la altura del cono

$$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\ cm$$

Por tanto la altura del triángulo pequeño es 4 cm.

El radio correspondiente vale

$$\frac{4}{12} = \frac{r'}{9} \Rightarrow r' = 3\ cm$$

$$A'_l = \pi(r - r')g = \pi(9 - 3) \cdot 15 = 90\ \pi\ cm^2$$
$$A'_t = A'_l + \pi r^2 + \pi r'^2 = 90\ \pi + 81\ \pi + 9\ \pi = 180\ \pi\ cm^2$$

31. *Determinar el área de la figura engendrada por un segmento de 20 cm de longitud, que tiene con el eje de giro las siguientes posiciones:*

1) Un extremo común con el eje y forma con él un ángulo de 30°.

2) Un extremo en el eje y forma con él un ángulo de 90°

3) Paralelo al eje y a 5 cm de distancia.

4) El punto medio dista 4 cm del eje y forma con él un ángulo de 30°.

5) El punto medio del segmento está en el eje y forma con él un ángulo de 30°.

Solución

1) Resulta un cono de radio $r=20 \cdot \text{sen } 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ y de altura $h=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$ cm

$$A_l = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 200\ \pi\ \text{cm}^2$$
$$A_t = A_l + \pi r^2 = 200\ \pi + 10^2\ \pi = 300\ \pi\ \text{cm}^2$$

2) Un círculo de radio 20 cm

$$A = \pi r^2 = 20^2\ \pi = 400\ \pi\ \text{cm}^2$$

3) Un cilindro de 20 cm de altura y 5 cm de base

$$A_l = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 20 = 200\ \pi\ \text{cm}^2$$
$$A_t = A_l + 2\pi r^2 = 200\ \pi + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 250\ \pi\ \text{cm}^2$$

4) Se forman dos conos de generatrices 18 y 2 cm.

— El cono mayor de generatriz 18, tiene de radio

$$r = 18 \cdot \text{sen } 30^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9$$

$$A_l' = \pi r g = \pi \cdot 9 \cdot 18 = 162\ \pi\ \text{cm}^2$$
$$A_t' = A_l' + \pi r^2 = 162\ \pi + 9^2\ \pi = 243\ \pi\ \text{cm}^2$$

— El cono menor de generatriz 2 tiene de radio

$$r = 2 \cdot \text{sen } 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$A_l'' = \pi r g = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi\,\text{cm}^2$$
$$A_t'' = A_l'' + \pi r^2 = 2\pi + \pi = 3\pi\,\text{cm}^2$$

Luego

$$A_l = A_l' + A_l'' = 162\pi + 2\pi = 164\pi\ \text{cm}^2$$
$$A_t = A_t' + A_t'' = 243\pi + 3\pi = 246\pi\,\text{cm}^2$$

5) Se forman dos conos iguales de generatriz 10 cm y de radio de la base

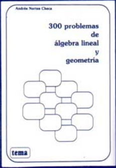
$$r = 10 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$A_l = 2A'_l = 2\pi r g = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t = 2A'_t = 2A'_l + 2\pi r^2 = 100\pi + 50\pi = 150\pi \text{ cm}^2$$

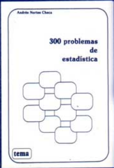
Conjuntos • Relaciones • Números naturales • Operaciones con números naturales • Fracciones y decimales • Sistema métrico decimal. Medidas de longitud, capacidad y masa • Medidas de tiempo y dinero • Elementos y figuras en la geometría del plano. Igualdad en el plano • Medidas de superficie. Medida de figuras planas • Geometría en el espacio.

Teoría de conjuntos • Relaciones • Aplicaciones • Números Naturales • Sistemas de Numeración • Divisibilidad en N • Números-Enteros y Racionales • Areas de Figuras Planas • Geometría del plano • Traslaciones, Giros y Simetrías • Apéndice: Problemas Oposiciones. E.G.B. Prueba A).



Estructuras • Espacios Vectoriales • Determinantes, Matrices y Sistemas • Aplicaciones lineales y bilineales • Polinomios • Transformaciones ortogonales. Homotecias y semejanzas • Areas y volúmenes de cuerpos geométricos.

Conjuntos • Relaciones • Aplicaciones • Estructuras algebraicas • Números naturales. Sistemas de numeración • Números enteros y racionales • Divisibilidad y congruencias • Conceptos fundamentales de geometría • Estudio de polígonos. Areas • Estudio sobre la circunferencia • Relaciones métricas en un triángulo • Poliedros: Areas y volúmenes • Apéndice.



Frecuencias, tablas y gráficos • Medidas de tendencia central • Medidas de dispersión y asimetría • Regresión y correlación • Probabilidad • Distribución de una variable aleatoria • Distribución binomial y de Poisson • Distribución normal • Apéndice • Tablas.

tema